Université de Toulon
MP21 calcul différentiel 2019-2020
Filières L1 P.C. et S.I.

Feuille de T.D. 1 : Développements limités

Calcul de DL base.

Dans la suite, si nécessaire, on utilisera (sans les redémontrer), les développements limités usuels en 0 à l'ordre n suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
(1+x)^\alpha & = & 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+...+\alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\frac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+x^3+...+x^n+x^n\epsilon(x)\ , \\
\mathrm{e}^x & = & 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\sin(x) & = & x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\cos(x) & = & 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+x^n\epsilon(x)\ , \\
\ln(1+x) & = & x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+x^n\epsilon(x)\ .
\end{array}
$$

Exercice 1 *Calculer les développements limités à l'ordre* 2 *au point* 0 *des fonctions suivantes :*

(1) $f_1(x) := x,$

(2) $f_2(x) := x^4+5x^3+2x^2-1,$

(3) $f_3(x) := \frac{1}{1+x},$

(4) $f_4(x) := \frac{1+x^2+x^4}{(1+x)^4}.$

Exercice 2 *Donner le développement limité à l'ordre* 4 *en* $x_0=0$ *des fonctions* $x\mapsto\sin(-x)$, $x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$ *et* $x\mapsto\ln(1-x)$.

Exercice 3 *En utilisant les propriétés sur la somme, le produit ou le quotient de deux développements limités, démontrer les développements limités en* 0

suivants

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}x &= x + \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon(x) \ , \\ \mathrm{ch}x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x) \ , \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x) \ . \end{aligned}$$

Exercice 4 *En utilisant la propriété sur la composition des développements limités, démontrer le développement limité en* $x_0 = 0$ *à l'ordre* 4 *suivant*

$$\mathrm{e}^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon(x) \ .$$

Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin x \cos x$
2. $x \mapsto \sin(\tan x)$
3. $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1 + x)}$
4. $x \mapsto e^{\cos x}$

Exercice 5 *Calculer les développements limités à l'ordre 2 des fonctions de l'exercice 1 au point 1.*

Application aux limites- ordre de grandeurs

Exercice 6 (calculs de limites)

1. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\ x}{\sin\ x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\ln(1+x)}$
3. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin\ x}{x}\right)$
5. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

Application à l'allure de la courbe representative de f et maxima et minima

Exercice 7 *Pour chaque développement limité calculé précédemment, lire sur le D.L. :*
- la tangente à la courbe representative de la fonction (dans le point ou le D.L à été effectué).
- l'allure de la courbe representative par rapport par rapport à la tangente.
- si la fonction admet un maximum ou minimum local dans le point où le D.L. a été effectué.

Exercices complémentaires

Exercice 8 *Calculer les limites suivantes.*

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^x}{\sin x-x^2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos(\dfrac{1}{x^2})\right)^{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{5}{x})^x$

Exercice 9
1) Donner le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro de la fonction g définie pour tout t, par $g(t)=\sqrt{1+t}$.
2) Etudier l'existence d'asymptotes quand $x\to+\infty$ et quand $x\to-\infty$ de la fonction f définie pour tout x, par $f(x)=x+1-\sqrt{1+x^2}$ (on pourra faire un changement de variable pour se ramener au voisinage de zéro).
3) Préciser la position du graphe de f par rapport aux asymptotes.