UNIVERSITÉ DE TOULON

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

L1 PC & L1 SI
(2019-2020)

MP-21 (Math 3) Calcul différentiel

Cours :

Annalisa Panati *email :* annalisa.panati@univ-tln.fr
page web : http ://panati.univ-tln.fr

Travaux dirigés : Filière PC :

Annalisa Panati *email :* annalisa.panati@univ-tln.fr
Michel Rouleux *email :* rouleux@univ-tln.fr

Filière SI :

Sylvain Zacler *email :* sylvain.zalczer@univ-tln.fr
Michel Rouleux *email :* rouleux@univ-tln.fr

Ces notes de cours ont la fonction de résumé du cours comme aide à la révision. Elle sont pensées comme complément des explications en classe et elle ne rémplacent, en aucun cas, la présence au cours.

Les étudiants qui sont dans l'impossibilité d'assister aux cours pour des raisons exceptionnelles peuvent me contacter pour avoir références complémentaires.

1 Calcul différentiel dans une variable

1.1 Fonctions d'une variable. Rappels.

1.1.1 Limite en termes de distance

Soit f une fonction réelle à variable réelle. On notera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

En vue du traitement de la limite en deux variables, on rappelle ici la définition de limite de f pour x qui tombe vers x_0 en mettant en évidence le rôle de la distance.

Cette définition cherche à formaliser la notion intuitive de limite, c'est à dire l'idée que *quand la distance entre x et x_0 est petite, alors la distance entre $f(x)$ et sa limite ℓ est petite*. On note par $d(x, y) = |x - y|$.

Comme on a vu en classe, on ne peut pas utiliser la notion de limite pour définir la limite, donc pour ne pas tomber dans un paradoxe logique, on est obligé d'utiliser une formulation qui utilise les quantificateurs "ϵ, δ". Cela peut rendre la définition "obscure" pour l'étudiant, mais la signification est la même. Voici la définition (que vous avez déjà vu en M11) :

Définition 1.1 *On dit que ℓ est la limite de f pour x qui tend vers x_0* si et seulement si *pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ alors $|f(x) - \ell| < \epsilon$.*
On note alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

En vue du traitement de la limite en deux variables, on remarque que cette définition peut être décrite en termes de distance.

Définition 1.2 *On dit que ℓ est la limite de f pour x qui tend vers x_0* si et seulement si *pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que si $d(x, x_0) < \delta_\epsilon$ alors $d(f(x), \ell) < \epsilon$.*
On note alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Une fois que une définition cohérente de limite a été donnée, il n'est pas nécessaire d'utiliser cette définition pour calculer des limites de fonction ou pour montrer leur existence.

Pour montrer que une limite existe, il suffit de prouver que si $d(x, x_0) \leq \delta$, alors

$$|d(f(x), \ell)| < \epsilon(\delta)$$

avec $\epsilon(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$.
En d'autres termes $\epsilon(\delta)$ est une fonction simple dont on connait déjà la limite.

Remarque importante : À noter que la définition de limite dépend seulement de la **distance** entre x et x_0. Ici il s'agit de la distance dans $\mathbb{R}$. Pour les fonctions en deux variables, on devra remplacer la distance dans $\mathbb{R}$ avec celle dans $\mathbb{R}^2$ (voir sect **??**).

Exemple Considérons la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} x^3 \sin x = 0$$

Si on veut prouver cela **à partir de la définition** on doit prouver que pour pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que si $|x - 0| < \delta_\epsilon$ alors $|x^3 sinx - 0l| < \epsilon$. Cela existe car si $|x - 0| < \delta_\epsilon$ alors

$$|x^3 \sin x - 0| < |\delta_\epsilon^3 \sin \delta_\epsilon| \leq \delta_\epsilon^3.$$

Donc il suffit de choisir $\delta_\epsilon = \sqrt[3]{\epsilon}$.

Si par contre, comme on fera dans ce cours, on admet de connaître la limite de fonctions simples, on peut **calculer la limite** en se reposant sur ces limites plus simples que on connaît.
Par exemple on admet que $x^3 \to 0$ si $x \to 0$.
Alors on peut simplement écrire :

$$|x^3 \sin x - 0| \leq |x|^3 \to 0$$

quand $|x| \to 0$.
Avec la notation précédente si $d(x, 0) = |x - 0| < \delta$ alors

$$|x^3 \sin x - 0| \leq |x|^3 < \delta^3 = \epsilon(\delta) \to 0$$

si $\delta \to 0$.