Par contre, si f est n fois dérivables, le théorème de Taylor-Young nous permet de trouver le D.L.

Theorem 2.7 *Taylor-Young Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Alors f admet un D.L. à l'ordre n, donné par*

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+h^n\epsilon(h).$$

où $\epsilon(h) \to 0$ pour $h \to 0$.

Remarque 2.8 *Dans cette version du théorème, le reste est exprimé sous la forme $h^n\epsilon(h)$. Cela s'appelle le* ***reste de Peano****.*

Remarque 2.9 *Il existe plusieurs versions de ce théorème.*
*Dans la littérature (c'est à dire dans d'autre texte de mathématiques), on peut trouver des hypothèses plus fortes. Ces hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour avoir plus d'information sur le reste, notamment l'écrire sous d'autres formes (****reste de Cauchy****,* ***reste de Lagrange****,* ***reste en forme d'intégrale****).*
Dans ce cours, on verra seulement la version avec le ***reste de Peano****.*

Dans les textes français, on trouve souvent l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^n$ près de x_0 pour la forme de Peano (c'est à dire f est dérivable n fois et les dérivées sont continues dans un voisinage de x_0), bien qu'elle ne soit pas une hypothèse minimale (c'est à dire bien que une hypothèse plus faible aurait suffit).

2.2.1 Règles de composition du D.L.

Un des avantages du D.L. est la possibilité de composer les développements, ce qui amène à pouvoir obtenir rapidement les D.L. des fonctions composées.

Supposons que f, g admettent un D.L. à 'ordre n c.à.d.

$$f(x_0+h) = P(h) + h^n\epsilon(h), \quad g(x_0+h) = R(h) + h^n\epsilon(h), \quad .$$

Alors

1. $f+g$ admet un D.L. à l'ordre n donné par $f(x_0+h)+g(x_0+h) = P(h)+Q(h)+h^n\epsilon(h)$,
2. $f\cdot g$ admet un D.L. à l'ordre n donné par $f(x_0+h)g(x_0+h) = R(h)+h^n\epsilon(h)$ où $R(h)$ est obtenu en gardant seulement les termes d'ordre $\leq n$ du polynôme $P(h)Q(h)$

Soit maintenant g une fonction qui admet un D.L. **en** 0. On va appeler sa variable u. Donc $g(h) = R(h)+h^n\epsilon(h)$.

1. $g\circ f$ admet un D.L. à l'ordre n donné par $f(x_0+g(h)) = R(h)+h^n\epsilon(h)$, où $R(h)$ est obtenu en gardant seulement les termes d'ordre $\leq n$ du polynôme $P(Q(h))$.

Remarque 2.10 *Attention : dans la composition g* ***doit être une fonction qui tombe vers*** *0* ***en*** *0. Cela est* ***essentiel****. Voir exemple vu en classe.*

Exemple vu en classe : $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$, et $x_0 = 0$.
D'autres exemples seront traités en T.D.

2.2.2 Applications

L'application de la formule de Taylor-Young nous permet de résoudre des formes indéterminés du type suivant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{e^x-1}$$

D'autres exemples seront traité en T.D.

2.2.3 Position par rapport à la tangente, et minima

Une fois que on a calculé le D.L., on peut lire des information sur la **position la courbe** par rapport à la tangente.

On a déjà vu que l'équation par rapport à la tangente se lit sur le D.L. à l'ordre 1

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+h\epsilon(h).$$

donc la tangente est donnée par

$$y = f(x_0)+f(x_0)(x-x_0).$$

On lit la position par rapport à la tangente sur le **premier terme non nul du D.L**. Son signe nous donne la position.

1. si le **premier terme non nul du D.L** est toujours **positif** (ax^2, ax^4, etc), $a > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ passe **au dessus** de la tangente.
2. si le **premier terme non nul du D.L** est toujours **négatif** (ax^2, ax^4, etc), $a < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ passe **en dessous** de la tangente,
3. si le **premier terme non nul du D.L change de signe** (ax^3, ax^5, etc.), alors $\mathcal{C}_f$ **traverse** de la tangente.

Dans le cas particulier ou la tangente est **horizontale** (ou de façon équivalente $f'(x_0) = 0$), on a un **point critique**, c'est à dire un point ou on a potentiellement un extremum local.

Pour déterminer s'il **minimum, maximum,** ou un **point d'inflexion**, il suffit de regarder l'allure de la courbe près de x_0. À nouveau :

1. si le **premier terme non nul du D.L** est toujours **positif** (ax^2, ax^4, etc), $a > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ passe **au dessus** de la tangente ; cela correspond à un **minimum**.
2. si le **premier terme non nul du D.L** est toujours **négatif** (ax^2, ax^4, etc), $a < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ passe **en dessous** de la tangente ; cela correspond à un **maximum**.
3. si le **premier terme non nul du D.L change de signe** (ax^3, ax^5, etc.), alors $\mathcal{C}_f$ **traverse** de la tangente ; Cela correspond à un **point d'inflexion**.

D'autres exemples seront traités en T.D.

2.2.4 Position par rapport à l'asymptote

Le D.L. peuvent être utilisés pour calculer la position de la courbe représentative de f, notée par $\mathcal{C}_f$ par rapport à un asymptote à l'infini.
On rappelle la définition d'asymptote et comment le calculer.

Définition 2.11 *On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est* asymptote *à la courbe représentative de f en* $\pm\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Si l'asymptote existe, la limite

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0$$

donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

avec a un nombre fini ($a \in \mathbb{R}$).
Donc pour établir l'existence de l'asymptote on peut commencer à voir si la limite $\frac{f(x)}{x}$ existe.

Cette condition n'est pas suffisante (exemple : $f(x) = \ln(x)$).
Il faut aussi montrer que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$$

admet une limite finie. Si elle existe, on appelle cette limite b, et l'asymptote à équation $y = ax + b$.

Pour utiliser les D.L. en $x_0 = 0$ pour déterminer la position par rapport à la courbe, on doit d'abord écrire $f(x)$ d'une manière différente.
On écrit

$$f(x) = x \cdot \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

En posant $x = \frac{1}{u}$ on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{x} = f\left(\frac{1}{u}\right) u =: g(u).$$

Si $x \to \pm\infty$, alors $u \to 0$.
Donc on peut calculer le D.L. de u par rapport à u. Le premier deux termes doivent avoir coefficient a, b. Donc

$$g(u) = a + bu + cu^2 + u\epsilon(u).$$

Donc, on obtient

$$f(x) = ax + b + c\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)\epsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $y = ax + b$ est l'asymptote, et , si $c \neq 0$, **le signe** de $c\left(\frac{1}{x}\right)$ nous donne la position par rapport à $\mathcal{C}_f$. (Attention : le signe dépende aussi de x, si on prend $x \to +\infty$ ou $-\infty$.) Si $c = 0$, on a pas d'information. Il faut regarder le terme suivant du D.L.

Les exemples seront donnés au T.D.