2.3 Intégration

2.3.1 Généralités

On commence par réviser la notion d'intégrale. En vue de l'intégration en deux variables il est particulièrement important de comprendre le **changement de variable** dans l'intégrale.

La définition intuitive d'intégrale correspond à celle de l'**aire** comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ au dessous d'un intervalle $[a,b]$. Par aire on veut dire **aire avec signe**.

Ils existent des fonctions pour lesquelles le concept intuitif d'aire n'est pas bien défini. Par exemple pour la **fonction de Dirichlet**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ce ne pas clair quelle quantité doit être regardée comme aire.

Il faut donc une définition précise.
Dans ce cours, on ne rentrera pas dans les subtilités liées à la définition et on regardera que des fonctions pour lesquelles la notion intuitive d'aire est suffisante.

Cependant, pour donner une vision plus complète et pour les étudiants intéressés, on ajoute ici un parenthèse sur la définition.

2.3.2 Parenthèse : quelques mots sur la définition

La définition usuelle donnée dans les cours de première année est celle de l'**intégrale de Riemman**.

Cette définition correspond à approximer l'aire sous la courbe par un multi-rectangle que approche l'aire "par le bas" et un qui l'approche "par le haut" et prendre ensuite leurs "limites". Si les "limites" existent et sont égales, on dit que la fonction est **intégrable** (dans le sens de Riemman).
Voici la construction précise **pour une fonction bornée**. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$. On divise $[a,b]$ dans n sous-intervalles. Pour cela on choisi $n+1$ points x_i tels que $x_0 = a$ $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. On appelle P l'ensemble de ce points ($P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$).
Pour le multi-rectangle supérieur, on construit des rectangles qui ont pour base $[x_i, x_{i+1}]$ et pour hauteur sup $f(x)$ sur cet intervalle et on considère leur

union. On notera par $S_P(f)$ l'aire du multi-rectangle ainsi construit.

Pour le multi-rectangle inférieur, on construit des rectangles qui ont pour base $[x_i, x_{i+1}]$ et pour hauteur $\inf f(x)$ sur cet intervalle et on considère leur union. On notera son aire par $T_P(f)$.

Définition 2.12 *Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a, b]$. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** ssi*

$$\sup_{P partition} S_P(f) = \inf_{P partition} T_P(f).$$

Si la fonction est intégrable, alors on note

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \sup_{P partition} S_P(f) = \inf_{P partition} T_P(f).$$

Remarque 2.13 *La notation avec le symbole $\int$ rappelle que l'intégrale est une "limite" d'une somme ($\sum$) d'aire de rectangles.*

Remarque 2.14 *La fonction de Dirichlet n'est pas intégrable au sens de Riemann.*

Cette définition ne se généralise pas au deux variables ou bien peut se généraliser avec des difficultés.

Pour cela, une notion différente d'intégrale a été introduite, celle de l'**intégrale de Lesbegue**.

On approche l'aire sous la courbe de façon différente. On prend des fonctions **simples**, c'est à dire, qui prennent un nombre fini de valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_n$. On notera une fonction simple par s. Pour ces fonctions, on sait très bien calculer l'aire sous la courbe, elle sera :

$$A(s) = \sum_{i=1}^{n} s_i m(s_i)$$

où $m(s_i)$ est la longueur de l'intervalle (ou des union d'intervalles) ou f prends la valeurs s_i. En réalité, je suis en train de cacher un gros problème : pas tous les ensembles sont des intervalles et on ne peut pas tout le temps leur associer une longueur. Ce problème est traité par la **théorie de la mesure**

de Lesbegue, qui dépasse largement le niveau de ces cours. Cependant, si on glisse sur ce problème, la définition d'intégrale de Lesbegue est très claire : on approche l'aire par de fonction simples qui sont majorées par f.

Définition 2.15 *Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a, b]$. On dit que f est* ***intégrable au sens de Lebesgue*** ssi

$$\sup_{s \text{ simple, } s \leq f} A(s).$$

Si la fonction est intégrable, alors on note toujours

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sup_{s \text{ simple, } s \leq f} A(s).$$

Remarque 2.16 *La fonction de Dirichlet n'est pas intégrable au sens Lesbegue.*

2.4 Propriétés des intégrales

Avec l'interprétation de l'intégral comme aire sous-jacente à une courbe, les deux propriété suivantes sont intuitives (les étudiants plus motivés pourront chercher de les prouver à partir de la définition, comme exercice).

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\, \mathrm{d}x$$

2.5 Calcul d'intégrales : théorème fondamental de l'analyse

Si on devait appliquer la définition pour calculer les intégrales, on s'en sortirait jamais.

Heureusement, un utlil très puissant a été développé par les mathematiciens : le **théorème fondamental de l'analyse** ou **théorème fondamental du calcul différentiel**. La première forme de ce théorème fut publié par James Gregory en 1668 et une forme plus générale par Isaac Barrow, et ensuite la théorie a été développée par Isaac Newton et parallèlement par Gottfried Leibniz.

Theorem 2.17 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soit F une fonction telle que $F' = f$.*
Alors
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

La fonction F s'appelle **primitive** et elle est définie à moin d'une constante. Son nom en anglais est plus parlant : on l'appelle **anti-dérivée**. Ce nom est bien choisi, car, effectivement, on est en train d'inverser l'opération de dérivation.
Notation : F est noté aussi $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer l'intégrale, il suffit donc de savoir trouver une primitive. D'autres exemples et exercices seront donnés aux TD.

En vue du traitement des fonctions en deux variables, on a besoin de bien comprendre le changement de variable dans les intégrales. On regardera aussi l'intégration par parties.

2.5.1 Intégration par changement de variable

On veut comprendre comment l'expression d'un intégrale change sous un changement de variable.

Considérons d'abord une fonction constante égale à c sur un intervalle $[a, b]$ et 0 ailleurs.
Cela va sans dire que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\ \ \mathrm{d}x = c\,|b - c|$$

Si on fait un changement de variable du type $s = x + 1$ (où 1 est une constante choisie au hasard), on voit toute de suite que $x \in [a, b]$ *ssi* $s \in [a + 1, b + 1]$. Bien évidement
$$c|b - a| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+1}^{b+1} f(s)\,\mathrm{d}s = c \cdot |b - a|.$$