Feuille de T.D. 1 : Développements limités

Calcul de DL base.

Exercice 1 (développements limités usuels) *Montrer que :*

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ \dots\ + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x),$

(2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ \dots\ + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x),$

(3) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ \dots\ + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x),$

(4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ \dots\ + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x).$

Dans la suite, si nécessaire, on utilisera (sans les redémontrer), les développements limités usuels en 0 à l'ordre n suivants :

$$
\begin{array}{lcl}
(1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)\ , \\
\frac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\epsilon(x)\ , \\
e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)\ , \\
\sin(x) & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^n\epsilon(x)\ , \\
\cos(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^n\epsilon(x)\ , \\
\ln(1+x) & = & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)\ .
\end{array}
$$

Exercice 2 *Calculer les développements limités à l'ordre* 2 *au point* 0 *puis au point* 1 *des fonctions suivantes :*

(1) $f_1(x) := x,$

(2) $f_2(x) := x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 1,$

(3) $f_3(x) := \frac{1}{1+x},$

(4) $f_4(x) := \frac{1+x^2+x^4}{(1+x)^4},$

Exercice 3 *Donner le développement limité à l'ordre* 4 *en* $x_0 = 0$ *des fonctions* $\sin(-x)$, e^{-x} *et* $\ln(1-x)$.

Exercice 4 *En utilisant les propriétés sur la somme, le produit ou le quotient de deux développements limités, démontrer les développements limités en* 0 *suivants*

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}x &= x + \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon(x)\ , \\
\mathrm{ch}x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)\ , \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x)\ .
\end{aligned}$$

Exercice 5 *En utilisant la propriété sur la composition des développements limités, démontrer le développement limité en* $x_0 = 0$ *à l'ordre* 4 *suivant*

$$\mathrm{e}^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\epsilon(x)\ .$$

Exercice 6 *Calculer les développements limités à l'ordre* 3 *en* 0 *des fonctions* "$\ln(\cos x)$", *puis* "$\sqrt{1+x}$", *et* "$\sqrt{1+\sin x}$".

Exercice 7 *[Extrait de* ***Algèbre et Analyse****, Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, S. Balac & F. Sturm, Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 2003]*
Calculer le développement limité au voisinage de 0 *de*

$\sin x \cos(2x)$	*à l'ordre 6,*
$\cos(x)\ln(1+x)$	*à l'ordre 4,*
$(x^3+1)\sqrt{1-x}$	*à l'ordre 3,*
$\dfrac{\sin x - 1}{\cos(x)+1}$	*à l'ordre 2,*
$\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+x)$	*à l'ordre 3,*
$\mathrm{e}^{\mathrm{arcsin}x}$	*à l'ordre 3,*
$(1+\arctan x)^{x/\sin^2 x}$	*à l'ordre 2,*
$x(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{x}}$	*à l'ordre 4.*

Exercice 8 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) := x^3 \sin \frac{1}{x}$.
Calculer le développement limité à l'ordre 2 *en* 0 *de* f *puis montrer que* f *n'admet pas de developpement limité à l'ordre* 3 *en* 0.

Exercice 9 *Calculer les développements limités à l'ordre* 4 *en* $\pi/2$ *puis* $\pi/4$ *des fonctions "sinus" et "cosinus".*

Exercice 10 (arcsinus et arccosinus) *Calculer les développements limités à l'ordre* 4 *en* 0 *des fonctions "arcsinus" et "arccosinus".*

Exercice 11 *Calculer les développements limités à l'ordre* 4 *en* 0 *des fonctions "sh" et "ch" et "argsh" puis le développement limité à l'ordre* 2 *en* 2 *de "argch".*

Application aux limites- ordre de grandeurs

Exercice 12 (calculs de limites)

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)^{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x - \mathrm{e}^x}{\arcsin x - x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x-\sin x} + \dfrac{1}{x - \operatorname{sh} x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+\sqrt{x}\right) \ln x$

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{7}{x}\right)^x$

Exercice 13 (tangente et arctangente)
1) *En utilisant les développements limités des fonctions "sinus" et "cosinus", calculer le développement à l'ordre* 4 *en* 0 *de la fonction "tangente".*

2) *Calculer de deux façons différentes le développement limité à l'ordre* 4 *en* 0 *de la fonction "arctangente".*

Application à l'allure de la courbe representative de f et maxima et minima

Exercice 14 *Pour chaque développement limité de la section , lire sur le D.L. :*
- la tangente à la courbe representative de la fonction (dans le point ou le D.L à été effectué).
- l'allure de la courbe representative par rapport par rapport à la tangente.
- si la fonction admet un maximum ou minimum local dans le point où le D.L. a été effectué.

Position par rapport à l'asymptote

Exercice 15 (développement limité au voisinage de l'infini) 1) *Calculer le développement limité à l'ordre* 3 *en* 0 *de* $\ln\big(1+y+y^2\big)$.
2) *Calculer le développement limité à l'ordre* 2 *au voisinage de l'infini de la fonction*

$$f(x) := (2x-1)\ln\frac{x^2}{1+x+x^2}.$$

3) *Calculer la limite de* $x^2\big(f(x)+2\big)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$.

Exercice 16
1) Donner le développement limité à l'ordre 1 *au voisinage de zéro de la fonction* g *définie pour tout* t, *par* $g(t)=\sqrt{1+t}$.
2) Etudier l'existence d'asymptotes quand $x\to+\infty$ *et quand* $x\to-\infty$ *de la fonction* f *définie pour tout* x, *par* $f(x)=x+1-\sqrt{1+x^2}$ *(on pourra faire un changement de variable pour se ramener au voisinage de zéro).*
3) Préciser la position du graphe de f *par rapport aux asymptotes.*

Exercice 17 (développement limité au voisinage de l'infini) *Déterminer les asymptotes de la courbe d'équation :*

$$y = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$$

Préciser la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.