Exercice 1

Les variable decisionelles sont le nombre de tournevis et de marteau produit.

Soit x = nombre de tournevis et y = nombre de marteaux

La fonction que on veut maximiser est. le gain obtenu par la vente de ces produits.

Pour chaque tournevis vendu on gagne $6-1{,}5$ euros $=$ $4{,}5$ euros

Pour chaque marteau on gagne $5-1$ euros.

Pour maximiser le gain il faut donc maximiser la fonction objectif

$$f(x,y) = 4{,}5x - 4y$$

Les contraintes sont :

Par jour on a 18.000 euros. Donc $1{,}5x + y \leq 18.000$

On ne peut pas produire plus que 14000 outils par jour

donc $x+y \leq 14000$

Bien sûr, $x \geq 0, y \geq 0$

Donc la region sur laquelle il faut maximiser (l'ensemble admissible) est

$$E = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1{,}5x+y \leq 18.000, x+y \leq 14.000$$

Graphiquement cette région est

$y \leq -x + 14.000$

$y \leq -\frac{3x}{2} + 18.000$

Il s'agit d'un problème linéaire sur un ensemble avec bord linéaire. donc si le max existe doit être sur un sommet. De plus E est borné et fermé donc par le théorème de Weierstrass le max existe.

Pour trouver le max il suffit donc d'évaluer la fonction aux sommets.

Les sommets sont : $(0,0)$, $(0,12000)$, $(14\,000,0)$ A point d'intersection entre

$y = -x + 14.000$ et $y = -\frac{3}{2}x + 18.000$

Donc $-x + 14.000 = -\frac{3}{2}x + 18.000 \implies \frac{x}{2} = 4\,000 \quad x = 8\,000 \qquad \implies y = 6\,000$

$A = (8000, 6\,000)$

La fonction vaut

$f(0,0) = 0$

$f(0,12000) = 4{,}5 \; 12\,000 = 54.000$

$f(14000,0) = (4\;). \; 14.000 = 56.000$

$f(8000,6000) = (4.5)\,8\,000 + 4.\;6\,000 = 36.000 + 24\,000 = 60\,000$

Donc le $\max_{E} f(x,y) = 62.000$ atteint au point $(8\,000, 6{,}000)$.

La stratégie optimal est donc celle de produire 8.000 tournevis et 6 000 marteaux par jour.

Exercice 2

(i) Soit f la fonction $f(x,y) = y^2(e^x) + x^2$

On remarque que
$f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
De plus $f(x,1) = e^x \quad \to +\infty$ pour $x \to +\infty$

donc $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$

$\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$

On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2e^x+2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(e^x)$

Donc $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$
Donc il faut étudier le point $(x_0,y_0) = (0,0)$.

Methode 1

On calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^x+2$, $\frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2ye^x$ $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 2e^x$

donc
$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial}{\partial x\partial y} f(0,0)xy + \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)y^2 + \|(x,y)\|^2 \varepsilon(\|(x,y)\|)$

$= 2x^2 + 2y^2 + \|(x,y)\|^2 \varepsilon(\|(x,y)\|)$

Or $2x^2+2y^2>0$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ Donc $(0,0)$ min local. (et global) strict

Methode 2

$\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$ et $f(0,0) = 0$ donc $(0,0)$ point de min global
$f(x,y) > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$ donc $(0,0)$ min strict.

(ii) Sur le triangle par Weirstam. Il existent max et min
$(0,0) \in E$ donc $\min\limits_{E} f(x,y) = \min\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(0,0) = 0$
Puisque $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ le max va être sur le bord.

Il faut donc étudier

$f(x,0)$ $x \in [0,1]$

$f(0,y)$ $y \in [0,1]$

$f(x,1-x)$ $x \in [0,1]$

$f(x,0) = x^2$ $\max_{[0,1]} x^2 = 1$

$f(0,y) = y^2$ $\max_{[0,1]} y^2 = 1$

$f(x,x) = (1-x)^2 e^x + x^2$

Methode 1.

On regarde la position de la diagonale $(x, 1-x)$ par rapport au lignes de niveau.

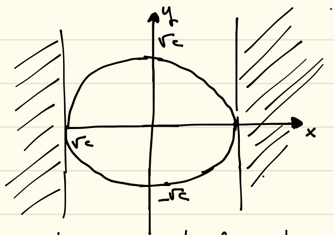
Ligne de niveau c : $f(x,y) = c \iff y^2 e^x + x^2 = c$

$$\iff y^2 = \frac{c - x^2}{e^x}$$

cette équation a des solutions si et seulement si $c - x^2 \geq 0$

donc $\iff |x| \leq \sqrt{c}$

qualitativement la ligne de niveau c est



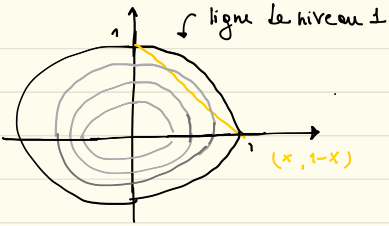
On veut comparer la ligne de niveau 1 avec la diagonale

$y = \frac{1-x^2}{e^x}$ et $y = 1-x$

Pour $x \in [0,1]$, on a $\sqrt{\frac{1-x^2}{e^x}} > \sqrt{1-x^2} > \sqrt{(1-x)^2} > 1-x$

(car $1-x^2 > 1-2x+x^2 \iff 0 > -2x+2x^2 = 2(x-1) \iff x < 1$)

Donc



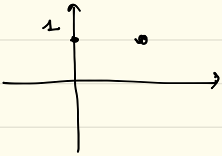
Donc $\max_{x\in[0,1]} f(x,1-x) = 1$

en conclusion

$$\max_{E} f(x,y) = 1$$

Methode 2

On cherche a comprendre l'allure de $g(x) = (x-1)^2 e^x + x^2$



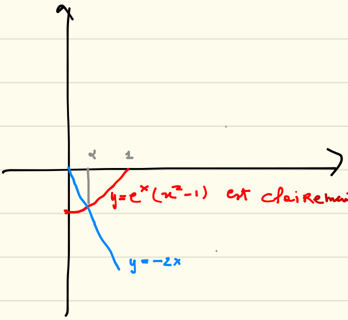
On voit facilement que $g(0) = g(1) = 1$

De plus pour $x \in [0,1]$

On calcule la dérivée de $g(x)$

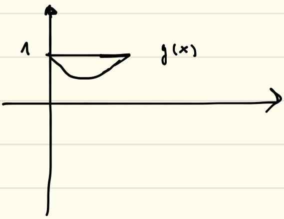
$$g'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x + 2x$$
$$= e^x(2x-2+x^2-2x+1)+2x$$
$$= e^x(x^2-1)+2x$$

$$g'(x) = 0 \iff e^x(x^2-1)+2x = 0 \iff e^x(x^2-1) = -2x$$



$y = e^x(x^2-1)$ est clairement croissante sur $[0,1]$ car produit de fonctions croissantes

x	0		α		1
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$		↘		↗	



Donc $\max_{[0,1]} f(x,1-x) = 1$.