Chapitre 3

Formule de Taylor et Développements Limités

On a vu que l'étude de la courbe représentative d'une fonction f au voisinage d'un point $M_0 = (x_0, f(x_0))$ pouvait être grandement simplifiée par l'utilsation de l'approximation affine de cette fonction, donnée essentiellement par le nombre dérivée de f en x_0. De manière un peu imprécise, la courbe C_f a, au voisinage de M_0, la même allure que sa tangente, c'est-à-dire la courbe représentative de la fonction affine $T : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ce que l'on gagne ainsi, c'est que, en général, l'étude de la fonction T est bien plus simple que celle de la fonction f.

On se pose maintenant la question de savoir si l'on peut obtenir des renseignements plus précis sur C_f en remplaçant f par une fonction peut-être plus compliquée que T, mais à peine plus : un polynôme de degré ≥ 1.

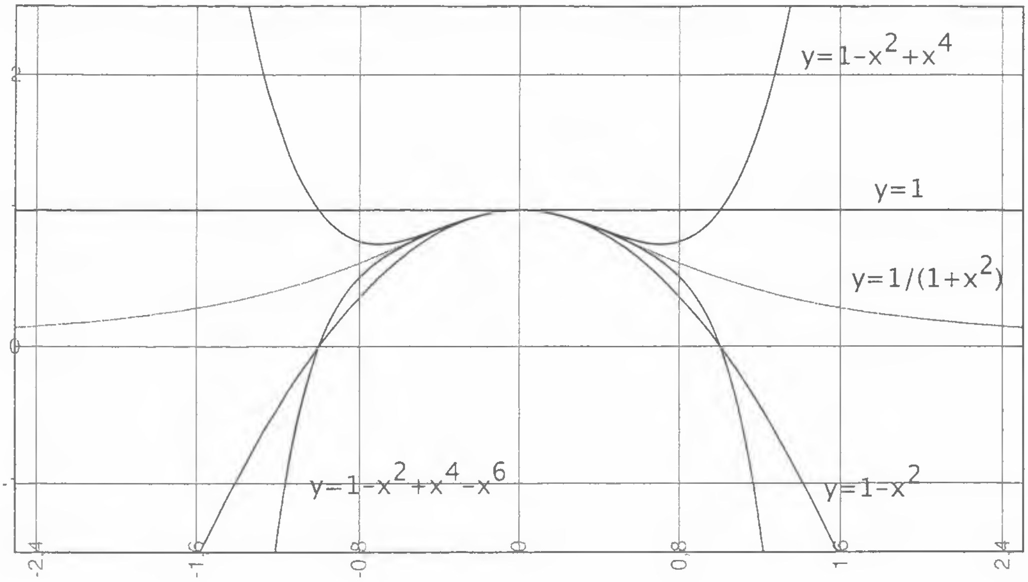
Voici un exemple instructif. En utilisant l'expression de la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2n+1}}{1+x^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$. Sur la figure ci-dessous on a tracé la courbe représentative de f, et celles des polynômes $P_2(x) = 1 - x^2$, $P_4(x) = 1 - x^2 + x^4 \ldots$



3.1 La formule de Taylor-Young

3.1.1 D.L. à l'ordre n

Définition 3.1.1 Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un développement limité (D.L.) à l'ordre n en x_0 lorsqu'il existe des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que

1. $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$,
2. pour tout x dans un voisinage de x_0 on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

Le polynôme $P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle alors partie principale, ou partie principale du D.L.

Remarque 3.1.2 Si f admet un D.L. à l'ordre n en x_0, celui-ci (i.e. les coefficients et la fonction ε) est unique. On peut le voir par exemple pour un D.L. à l'ordre 2 en 0...

On a déjà rencontré cette définition pour $n = 1$: On a vu que l'existence d'un D.L. à l'ordre 1 est équivalent au fait que la fonction est dérivable au point considéré. Ce n'est plus vrai pour les ordres supérieurs, comme le montre l'

Exemple 3.1.3 *Soit f la fonction donnée par $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. D'abord f admet un D.L. à l'ordre 2 en 0, puisque l'on peut écrire*

$$f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + x^2\varepsilon_2(x), \quad \varepsilon_2(x) = x \sin \frac{1}{x} \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

Du coup f est dérivable en 0 car f admet automatiquement un D.L. à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = 0 + 0.x + x\varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) = 0.x + x\varepsilon_2(x).$$

La dérivée de f est la fonction f' définie par $f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$, et f' n'est pas dérivable en 0 : le taux d'accroissement de f' en 0 est

$$\tau(x) = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

donc n'a pas de limite quand $x \to 0$. Au total f admet un D.L. à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en ce point.

3.1.2 Le théorème de Taylor-Young

Nous allons voir que la situation n'est pas si désespérée que l'exemple précédent peut le laisser croire.

Définition 3.1.4 Soit f une fonction n fois dérivable dans un voisinage de x_0. On appelle polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 la fonction $T_{x_0,n}$ définie par

$$T_{x_0,n}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Proposition 3.1.5 Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de x_0, alors f admet un D.L. à l'ordre n en x_0. Sa partie principale est le polynôme de Taylor de f en x_0 à l'ordre n. Autrement dit, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 et telle que

$$f(x) = T_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0).$$

En TD, on se limitera la plupart du temps à des D.L. d'ordre 2. Dans ce cadre le théorème de Taylor -Young dit que, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + (x - x_0)^2\varepsilon(x - x_0),$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

3.2 Calcul de D.L.

3.2.1 D.L. de référence en 0

Voici une liste de D.L. en $x_0 = 0$, que l'on peut établir à l'aide du théorème de Taylor-Young, et qu'il est indispensable de connaître sur le bout des doigts...

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + a(a-1)\ldots(a-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

3.2.2 Opérations et D.L.

Le calcul des dérivées successives d'une fonction peut-être assez pénible. Heureusement, ce n'est en général pas à partir du théorème de Taylor-Young que l'on obtient des D.L., mais plutôt à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 Si f_1 et f_2 sont deux fonctions qui admettent un D.L. à l'ordre n en $x_0 = 0$, de partie principale $P_1(x)$ et $P_2(x)$ respectivement, alors

1. La fonction $f_1 + f_2$ admet un D.L. à l'ordre n en 0, dont la partie principale s'obtient en ajoutant les polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$
2. La fonction $f_1 f_2$ admet un D.L. à l'ordre n en 0, dont la partie principale s'obtient en calculant le polynôme produit $Q(x) = P_1(x)P_2(x)$ et en ne gardant que les termes d'ordre $\leq n$ du polynôme $Q(x)$.

Attention ! Si f_1 admet un D.L. à l'ordre 5, et f_2 un D.L. à l'ordre 3, les règles ci-dessus ne donnent rien de mieux qu'un D.L. de la somme $f_1 + f_2$ et du produit $f_1 f_2$ à l'ordre 3. Si vous écrivez des termes d'ordre 4 ou 5, l'égalité que vous donnez a de grandes chances d'être fausse.

Exemple 3.2.2 *Calculer le D.L. en 0 à l'ordre 3 des fonctions* $e^x + \sin x$ *et* $e^x \sin x$.

Voici maintenant une règle qui donne le D.L. de la composée de deux fonctions. Comme d'habitude, les hypothèses et la formule sont un peu plus difficiles pour cette opération là.

3.2.3 Comment calculer un D.L. en $x_0 \neq 0$?

On peut bien sûr appliquer le théorème de Taylor-Young, et calculer les dérivées successives de la fonction en x_0, ou encore faire la remarque suivante : trouver un développement limité en x_0 pour la fonction f, revient à trouver un D.L. en 0 pour la fonction $h \mapsto f(h + x_0)$. On est donc conduit à poser $x = x_0 + h$ (c'est un changement de variable !), et à chercher un D.L. en 0 de la fonction $f(h + x_0)$.

Exemple 3.2.6 *On veut calculer le D.L. à l'ordre 3 en $x_0 = \pi/2$ de la fonction* sin. *On pose $x = \pi/2 + h$, et on écrit*

$$\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} + h) = \cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + h^3\epsilon(h) = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2} + (x - \frac{\pi}{2})^3\epsilon(x - \frac{\pi}{2}),$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en 0.

Attention ! Il est inutile, et même désastreux, de développer les puissances de $(x - x_0)$ dans le D.L. obtenu, puisque l'on veut connaître le comportement de $f(x)$ pour x proche de x_0.

3.3 Application à l'étude des fonctions

3.3.1 Calcul de limites

On mentionne simplement que l'utilisation de D.L. peut être très utile pour calculer des limites dans le cas de formes indéterminées.

3.3.2 Position par rapport à la tangente

On suppose ici que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, avec $n \geq 2$. Grâce au théorème de Taylor-Young, on sait que f admet un D.L. à l'ordre n en x_0, qui s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0).$$

On sait aussi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = T(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, puisque $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x - x_0),$$

avec

$$\varepsilon_1(x - x_0) = a_2(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-1} + (x - x_0)^{n-1}\varepsilon(x - x_0).$$

Du coup, au voisinage de x_0, on peut très facilement connaître la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0, qui est donnée par le signe de la différence $f(x) - T(x)$. Il suffit de connaître le signe de

$$f(x) - T(x) = a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0).$$

Voici deux exemples :

• Supposons que $a_2 > 0$. On peut écrire

$$f(x) - T(x) = a_2(x - x_0)^2(1 + g(x - x_0)),$$

où $g(x-x_0)$ tend vers 0 quand $x \to x_0$. Pour x assez proche de x_0, la quantité $(1+g(x-x_0))$ reste proche de 1, et en particulier est positive, tout comme $(x-x_0)^2$ et a_2 : la courbe C_f est au-dessus de sa tangente en x_0.

• Dans le cas où $a_2 < 0$, on conclut exactement de la même manière que C_f est en-dessous de sa tangente en x_0. Il reste à considérer le cas où $a_2 = 0$.

De manière générale, notons p le plus petit entier ≥ 2 tel que $a_p \neq 0$. Si p est paire, tout se passe comme dans le cas $p = 2$. Si p est impaire, on a

$$f(x) - T(x) = a_p(x - x_0)^p(1 + g(x - x_0)),$$

avec par exemple $a_p > 0$. La quantité $(1 + g(x - x_0))$ reste proche de 1, et en particulier est positive, tout comme a_p. Par contre cette fois $(x-x_0)^p$ est positif pour $x > x_0$ et négatif pour $x < x_0$: la courbe C_f est en-dessous de sa tangente en x_0 pour $x < x_0$, et au-dessus pour $x > x_0$.

Remarque 3.3.1 Pour étudier les positions relatives des courbes représentatives de deux fonctions f et g au voisinage d'un point d'abscisse x_0 donné, on peut procéder exactement comme pour f et T, c'est-à-dire calculer le D.L. en x_0 de la différence $f(x) - g(x)$, puis étudier son signe comme ci-dessus.

3.3.3 Asymptotes

Définition 3.3.2 On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Pour savoir si la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$, on peut calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},$$

et, si cette limite existe, en la notant a, on calcule ensuite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax.$$

Si cette limite b existe aussi, alors la droite $D : y = ax + b$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

On peut aussi utiliser des D.L. : on commence en posant $u = \dfrac{1}{x}$, et on calcule le D.L. en $u_0 = 0$ de la fonction $g(u) = \dfrac{f(x)}{x} = uf(\dfrac{1}{u})$. Si ce D.L. commence par

$$g(u) = a + bu + u\varepsilon(u),$$

alors $f(x) - (ax + b) \to 0$ quand $x \to +\infty$, et $D : y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. D'ailleurs, pourvu qu'on ait un D.L. à un ordre suffisant, on peut étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote exactement comme ci-dessus pour la courbe et sa tangente en un point.