Université du Sud Toulon-Var | **Licence L1**
M21 | **14/02/2017**

Devoir Maison 2

À rendre lundi 27 février 2017

Il y a **4 exercices et 2 pages**.

Justifier toutes les réponses avec des explications claires et concises. Toute réponse sans justification comptera 0 points.

Pour toute question concernant les énonces, vous êtes priés de m'écrire

Exercice 1. Déterminer si le suites suivantes sont convergentes ou divergentes et établir qu'elle est leur limite (à partir de la définition ou en utilisant Cauchy et d'autre critères de cours).

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$,
2. $u_n = \frac{1}{n}$,
3. $u_n = sin(n)$,
4. $u_n = \frac{(-1)^n(n^3+n^2+\pi)}{\ln(n)}$,
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe).
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donné par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donné par

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|.$$

(i) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$, alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Montrer (avec un contrexample) que si on remplace 0 par un autre nombre réel la proposition n'est plus vraie.

(ii) Montrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, mais que l'inverse n'est pas vrai.

Exercice 3. (i) Soit $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction polynomiale c.à.d $P(z)=\sum_{k=1}^{n}a_nz^n$ avec $a_n\in\mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur réels. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}P(u_n)=P(\lim_{n\to+\infty}u_n).$$

(i) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue (utiliser la définition du cours). Montrer que (sous les même conditions)

$$\lim_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\lim_{n\to+\infty}u_n).$$

Exercice 4. (Suites récurrentes) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, l un nombre réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0=c$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
Montrer que si u_n converge vers $l\in C$, on doit avoir

$$f(l)=l.$$

Montrer que ceci est vrai formellement aussi pour $l=\pm\infty$, si on interprète

$$f(\pm\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}f(x).$$