Université du Sud Toulon-Var **Licence L1**
M21 **14/02/2017**

Devoir Maison 3

À rendre Mardi 14 février 2017

Il y a **7 exercices et 3 pages**.

Justifier toutes les réponses avec des explications claires et concises. Toute réponse sans justification comptera 0 points.

Pour toute question concernante les énonces, vous êtes priés de m'écrire.

Exercice 1. À partir de la définition de limite prouver que :

1. $\lim_{x\to x_0} x^3 + 5x + 1 = x_0^3 + 5x_0 + 1$
2. $\lim_{x\to x_0} x^2 + 5x + 1 = x_0^2 + 5x_0 + 1$
3. $\lim_{x\to +\infty} x^3 + 5x + 1 = +\infty$
4. $\lim_{x\to -\infty} x^3 + 5x + 1 = -\infty$
5. $\lim_{x\to +\infty} x^2 + 5x + 1 = +\infty$
6. $\lim_{x\to -\infty} x^2 + 5x + 1 = +\infty$

Exercice 2. À partir de la définition de limite prouver que, pour chaque pôlynome $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, **avec** $a_0 \geq 0$, on a :

1. $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
2. $\lim_{x\to \infty} P(x) = +\infty$

3. si n est pair, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$

4. si n est impair, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$

Exercice 3. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux application continues en x_0. Montrer que l'application $h = min\{f, g\}$ est continue en x_0.

Exercice 4. Etablir si les limites suivantes existent, et, si c'est le cas, les calculer.

1. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cos x$,

2. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} + \cos x$,

3. $\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{x}+\cos x}{x-5}$,

4. $\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{x}+\cos x}{(x-5)^2}$.

Exercice 5. Dans le cas suivantes établir si la fonction f est continue en x_0.

1. $f(x) = x\sin(x)$ pour $x = 0$,
2. $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$, pour $x = 0$,

3. $f(x) = |x - 5|$ pour $x = 5$,

4. $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1, \\ 1 + x, & x \geq 1 \end{cases}$$

   en $x_0 = 1$,
5. $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0, \\ 1 + x, & x \geq 0 \end{cases}$$

   en $x_0 = 0$,

6. $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{x-6}$ pour $x_0 = 6$,

7. $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{(x-6)^4}$ pour $x_0 = 6$.

Exercice 6. Pour chaque fonction de l'exercice 5, déterminer l'ensemble de définition de f et l'ensemble ou f est continue (on pourra motiver en utilisant les théoremes appris au cours).

Exercice 7. (bonus) Déterminer si les fonctions de l'exercice 5 sont dérivables au point x_0.