Licence Sciences et Techniques

L2 PC SI

MP33/M331

Algèbre linéaire

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire.

Gloria Faccanoni

http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html

Année 2015 – 2016

Dernière mise-à-jour : Jeudi 27 août 2015

Table des matières

USTV

Attention, ce polycopié est encore en cours de développement, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs. Merci de me les communiquer.

À quoi sert l'*algèbre linéaire* ? Malheureusement, il n'y a pas de réponse simple au niveau Licence : en effet, la plupart des problèmes pour lesquels on va utiliser l'algèbre linéaire peuvent aussi se résoudre de manière élémentaire (la plupart du temps en résolvant un système linéaire) et ceci peut donner l'impression qu'on remplace des calculs fastidieux mais simples par des arguments et des concepts très compliqués et abstraits. Cependant, même dans un premier cours d'algèbre linéaire, on peut déjà sentir l'intérêt de l'algèbre linéaire : celle-ci permet d'unifier des problèmes et des situations à priori très différentes, en donnant un cadre général dans lequel ces problèmes vont avoir le même aspect. Une telle démarche est fondamentale dans les mathématiques. Par exemple, on remarque que l'on sait additionner deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ou deux fonctions, ou deux polynômes ... et qu'on sait aussi multiplier chacun de ces objets par des réels. Puisque ces objets (différents) peuvent subir le même type d'opération, ayant les mêmes propriétés formelles, les raisonnements ou les concepts qui utilisent uniquement ces opérations vont être valables dans chacun des trois cadres cités. Autre exemple : les notions de droite, de plan, de repère (on dira base), que l'on connait déjà dans $\mathbb{R}^3$, vont aussi être valables pour des espaces de fonctions ou de polynômes ! La propriété qui dit que «dans $\mathbb{R}^3$, deux plans ont toujours une droite en commun» deviendra ainsi «dans tout espace vectoriel de dimension 3, deux sous-espaces vectoriel de dimension 2 ont toujours un sous-espaces de dimension 1 en commun» et sera vraie quelle que soit la nature des éléments de l'espace vectoriel (fonctions, polynômes ou autres et on pourra d'ailleurs la généraliser à des dimensions supérieures). Même si ce cours n'en donne qu'un tout petit aperçu, la quantité de situations qui peuvent être modélisées par l'algèbre linéaire est immense, et va de questions purement mathématiques jusqu'à des problèmes très concrets d'écologie (dynamique des populations), de météorologie, d'économie, de physique...

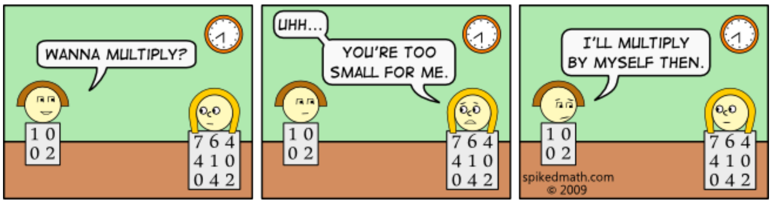
MP33		
CM	18h	12 séances de 1h30
TD	30h	20 séances de 1h30

Gloria Faccanoni

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
ℹ http://faccanoni.univ-tln.fr



1
Matrices

Définition *Matrice*

On appelle MATRICE $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Si $m = n$ on dit qu'on a une MATRICE CARRÉE. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Une matrice $m \times 1$ est appelée VECTEUR-COLONNE et une matrice $1 \times n$ est appelée VECTEUR-LIGNE.
On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ème colonne ($1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$).
Une matrice $\mathbb{A}$ est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Nous travaillerons avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$.

Exemple

La matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

est carrée et d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition *Matrice* NULLE

La MATRICE NULLE, notée $\mathbb{O}_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

Définition *Addition de matrices*

Si $\mathbb{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ et $\mathbb{B}=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ sont deux matrices $m\times n$, on définit l'ADDITION des matrices par

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}.$$

La MATRICE OPPOSÉE D'UNE MATRICE $\mathbb{A}$ est notée $-\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ alors $-\mathbb{A}=(-a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

Exemple

Soient les matrices 2×3 suivantes :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}3&4&2\\1&3&5\end{pmatrix},\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}6&1&9\\2&0&3\end{pmatrix}.$$

La somme de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est la matrice 2×3 suivante :

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}=\begin{pmatrix}3+6&4+1&2+9\\1+2&3+0&5+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5&11\\3&3&8\end{pmatrix}.$$

Attention

La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie.

Propriété

Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont des matrices de même ordre, alors nous avons
- ▷ $\mathbb{A}+\mathbb{B}=\mathbb{B}+\mathbb{A}$ (commutativité),
- ▷ $\mathbb{A}+(\mathbb{B}+\mathbb{C})=(\mathbb{A}+\mathbb{B})+\mathbb{C}$ (associativité).

Exemple

Soient les matrices 2×2 suivantes :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}6&-5\\2&1\end{pmatrix},\qquad \mathbb{C}=\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1+6&-1-5\\3+2&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-6\\5&1\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}+\mathbb{A}=\begin{pmatrix}6+1&-5-1\\2+3&1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-6\\5&1\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}+\mathbb{C}=\begin{pmatrix}6+0&-5+2\\2+2&1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3\\4&5\end{pmatrix}.$$

De plus,

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})+\mathbb{C}=\begin{pmatrix}7&-4\\7&5\end{pmatrix},\qquad \mathbb{A}+(\mathbb{B}+\mathbb{C})=\begin{pmatrix}7&-4\\7&5\end{pmatrix}.$$

Définition *Matrice DIAGONALE*

On appelle MATRICE DIAGONALE toute matrice carrée $\mathbb{D}=(d_{ij})_{1\le i,j\le n}$ telle que $i\neq j \implies d_{ij}=0$. Si on note $d_i\equiv d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$\mathbb{D}_n=\begin{pmatrix}d_1&0&\dots&0&0\\0&d_2&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&d_{n-1}&0\\0&0&\dots&0&d_n\end{pmatrix}.$$

On la note $\text{Diag}(d_1,d_2,\dots,d_n)$.

Définition *Matrice* IDENTITÉ

La MATRICE d'ordre n, notée $\mathbb{I}_n$, est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1,1,\dots,1)$.

Définition *Matrices* TRIANGULAIRES

On dit qu'une matrice carrée $\mathbb{A}=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est

▷ TRIANGULAIRE SUPÉRIEURE si $i>j \implies a_{ij}=0$,

▷ TRIANGULAIRE INFÉRIEURE si $i<j \implies a_{ij}=0$.

Une matrice triangulaire supérieure et inférieure (*i.e.* $i\neq j \implies a_{ij}=0$) est une matrice diagonale.

Exemple

$$\mathbb{U}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&2&-1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$$ est une matrice triangulaire supérieure,

$$\mathbb{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&0&0&0\\5&-1&2&0\\7&9&15&4\end{pmatrix}$$ est une matrice triangulaire inférieure,

$$\mathbb{D}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-8&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ est une matrice diagonale,

$$\mathbb{I}_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$ est la matrice identité d'ordre 4.

Définition *Produit d'une matrice par un scalaire*

Si $\mathbb{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ est une matrice $m\times n$ et si $\alpha\in\mathbb{K}$, on définit le PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE par

$$\alpha\cdot\mathbb{A}=(\alpha\cdot a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

Propriété

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de même ordre et $\alpha\in\mathbb{K}$ un scalaire, on a

▷ $\alpha\cdot(\mathbb{A}+\mathbb{B})=\alpha\cdot\mathbb{A}+\alpha\cdot\mathbb{B}$ (distributivité).

Exemple

Soit $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}3&4&2\\1&3&5\end{pmatrix}$ et $\alpha=\frac{1}{2}$. Alors $\alpha\cdot\mathbb{A}=\begin{pmatrix}3/2&2&1\\1/2&3/2&5/2\end{pmatrix}$.

Définition *Produit de matrices*

Si $\mathbb{A}=(a_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le n}}$ est une matrice $m\times n$ et $\mathbb{B}=(b_{kj})_{\substack{1\le k\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice $n\times p$, on définit le PRODUIT DES MATRICES par

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$$

C'est une matrice $m\times p$.

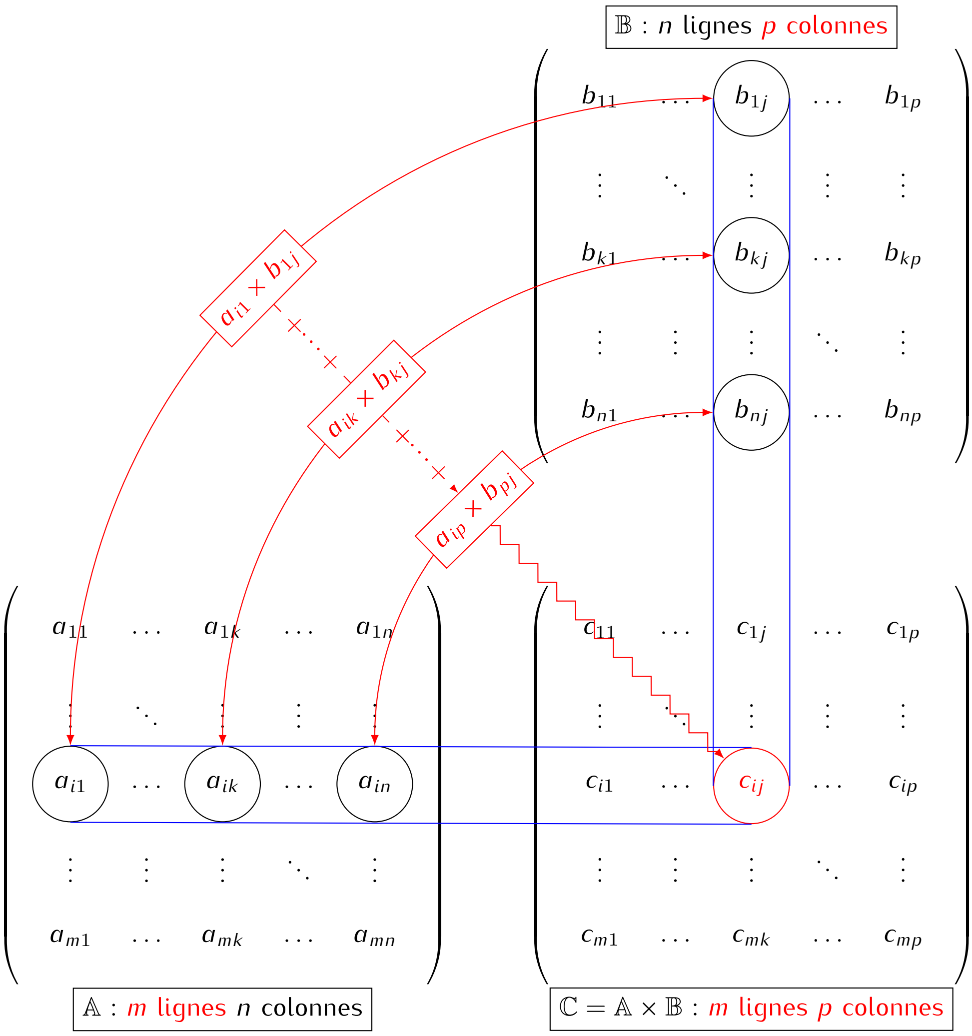
Exemple

Soient les deux matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3, la matrice $\mathbb{B}$ est d'ordre 3×3, donc la matrice produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est une matrice d'ordre 2×3 :

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1\times1+3\times0+0\times0 & 1\times2+3\times2+0\times(-1) & 1\times0+3\times3+0\times(-2) \\ -1\times1+1\times0+2\times0 & -1\times2+1\times2+2\times(-1) & -1\times0+1\times3+2\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$



Propriété

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{C} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors
- ▷ $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C}$ (associativité) ;
- ▷ $\mathbb{A}(\times(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \times \mathbb{B} + \mathbb{A} \times \mathbb{C}$ (distributivité) ;

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathbb{A} \times \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \times \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Attention

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$ en général (non commutativité).

Prenons le cas général avec $\mathbb{A}$ d'ordre $m \times p$ et $\mathbb{B}$ d'ordre $p \times n$. Le produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est défini, c'est une matrice d'ordre $m \times n$. Qu'en est-il du produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$? Il faut distinguer trois cas :
- ▷ si $m \neq n$ le produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ n'est pas défini ;
- ▷ si $m = n$ mais $p \neq n$, le produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est défini et c'est une matrice d'ordre $m \times n$ tandis que le produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ est défini mais c'est une matrice d'ordre $p \times p$ donc $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$;

- ▷ si $m = n = p$, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre m. Les produits $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ et $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ sont aussi carrés et d'ordre m mais là encore, en général, $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$;

Exemple

Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Définition *Matrice transposée*

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ est une matrice $m \times n$, on définit la matrice TRANSPOSÉE de $\mathbb{A}$, notée $\mathbb{A}^T$, par $\mathbb{A} = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$.
C'est donc une matrice $n \times m$ obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale.

Exemple

Soit la matrice $\mathbb{A}$ d'ordre 2×3 suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sa transposée est la matrice $\mathbb{A}^T$ d'ordre 3×2 suivante

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Propriété

- ▷ $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$ si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- ▷ $(\alpha\mathbb{A})^T = \alpha\mathbb{A}^T$ si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- ▷ $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$ si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
- ▷ $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \times \mathbb{A}^T$ si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition *Matrice symétrique, matrice anti-symétrique*

- ▷ Une matrice $\mathbb{A}$ est dite SYMÉTRIQUE si $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$, *i.e.* si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.
- ▷ Une matrice $\mathbb{A}$ est dite ANTI-SYMÉTRIQUE si $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$, *i.e.* si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.

Exemple

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ est une matrice symétrique.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ -5 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ est une matrice anti-symétrique.

Définition *Matrice inversible, matrice singulière*

Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite INVERSIBLE (ou régulière) si elle est symétrisable pour le produit matriciel, autrement dit s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \mathbb{I}_n.$$

Si une telle matrice existe, on la note $\mathbb{A}^{-1}$ et on l'appelle matrice INVERSE de $\mathbb{A}$.
Une matrice non inversible est dite SINGULIÈRE.

Proposition

Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices inversibles, alors
- ▷ $\mathbb{A}^{-1}$ l'est aussi et $\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A}$,
- ▷ $\mathbb{A}^T$ l'est aussi et $\left(\mathbb{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^T$,
- ▷ $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ l'est aussi et $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1} \times \mathbb{A}^{-1}$.

Définition *Trace d'une matrice*

Si $\mathbb{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, on définit la TRACE de $\mathbb{A}$ comme la somme des éléments de la diagonale principale :

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple

La trace de la matrice $\mathbb{A}$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + (-2) = 1$.

Propriété

Si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre n, alors
- ▷ $\operatorname{tr}(\mathbb{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbb{A})$,
- ▷ $\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B})$.

Si $\mathbb{A}$ est une matrice $m \times n$ et $\mathbb{B}$ une matrice $n \times m$, alors
- ▷ $\operatorname{tr}(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B} \times \mathbb{A})$.

Définition et calcul pratique d'un déterminant

Définition *Déterminant d'une matrice d'ordre n (règle de Laplace)*

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n.
Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \le i, j \le n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de $\mathbb{A}$.
Le DÉTERMINANT de $\mathbb{A}$, noté $\det(\mathbb{A})$ ou $|\mathbb{A}|$, est défini par récurrence sur l'ordre de la matrice $\mathbb{A}$:
- ▷ si $n = 1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A}) \equiv a_{11},$$

- ▷ si $n > 1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A}) \equiv \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbb{A}_{ij}) \qquad \text{quelque soit la ligne } i,\ 1 \le i \le n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(\mathbb{A}) \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbb{A}_{ij}) \qquad \text{quelque soit la colonne } j,\ 1 \le j \le n.$$

Astuce

Pour se souvenir des signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes + et − avec la formule $(-1)^{i+j}$ est analogue à la distribution des cases noirs et blanches sur un damier :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = a_{22}, \qquad \det(\mathbb{A}_{12}) = a_{21}, \qquad \det(\mathbb{A}_{21}) = a_{12}, \qquad \det(\mathbb{A}_{22}) = a_{11},$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :

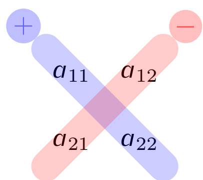
▷ $a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$)
▷ $-a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne $i = 2$)
▷ $a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) - a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne $j = 1$)
▷ $-a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) + a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j = 2$)

Ces formules donnent bien le même résultat.

Déterminant d'une matrice d'ordre 2 — méthode pratique

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n = 2$.

$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



Exemple

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 5 \times 3 - 7 \times 4 = 15 - 28 = -13.$$

Exemple

Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$\det(\mathbb{A}_{12}) = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{13}) = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{21}) = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32},$$

$$\det(\mathbb{A}_{22}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$\det(\mathbb{A}_{23}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31},$$
$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},$$
$$\det(\mathbb{A}_{32}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21},$$
$$\det(\mathbb{A}_{33}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ *par l'une des formules suivantes* :
- ▷ $a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbb{A}_{13})$ (développement suivant la ligne $i = 1$)
- ▷ $-a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) - a_{23}\det(\mathbb{A}_{23})$ (développement suivant la ligne $i = 2$)
- ▷ $a_{31}\det(\mathbb{A}_{31}) - a_{32}\det(\mathbb{A}_{32}) + a_{33}\det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la ligne $i = 3$)
- ▷ $-a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) + a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) - a_{31}\det(\mathbb{A}_{31})$ (développement suivant la colonne $j = 1$)
- ▷ $a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) - a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) + a_{32}\det(\mathbb{A}_{32})$ (développement suivant la colonne $j = 2$)
- ▷ $-a_{13}\det(\mathbb{A}_{13}) + a_{23}\det(\mathbb{A}_{23}) - a_{33}\det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la colonne $j = 3$)

Quelques calculs montrent que ces formules donnent bien le même résultat.

Propriété

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Astuce

Il convient d'utiliser la définition de déterminant après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéro sachant que
- ▷ si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(\mathbb{A}) = 0$;
- ▷ si on multiplie une colonne (resp. une ligne) par un scalaire $\alpha \neq 0$, alors le déterminant est multiplié par α ;
- ▷ si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé (*i.e.*, le déterminant change de signe) ;
- ▷ on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes), *i.e.*

$$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j, \qquad L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j,$$

avec $j \neq i$ et $\alpha \neq 0$.

Exemple

Soit la matrice
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
alors
$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10, \qquad \det(\mathbb{A}_{12}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det(\mathbb{A}_{13}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\det(\mathbb{A}_{21}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3, \qquad \det(\mathbb{A}_{22}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5, \qquad \det(\mathbb{A}_{23}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3,$$
$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2, \qquad \det(\mathbb{A}_{32}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det(\mathbb{A}_{33}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

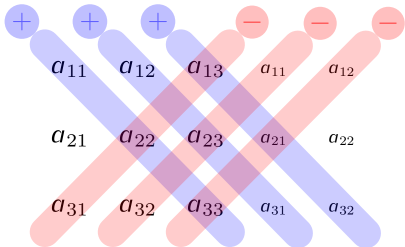
donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :
- ▷ $1\det(\mathbb{A}_{11}) + 0\det(\mathbb{A}_{12}) + 1\det(\mathbb{A}_{13}) = 10 + 0 + 0 = 10$
- ▷ $0\det(\mathbb{A}_{21}) + 2\det(\mathbb{A}_{22}) + 0\det(\mathbb{A}_{23}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$ ←-- formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer
- ▷ $0\det(\mathbb{A}_{31}) + 3\det(\mathbb{A}_{32}) + 5\det(\mathbb{A}_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$
- ▷ $1\det(\mathbb{A}_{11}) + 0\det(\mathbb{A}_{21}) + 0\det(\mathbb{A}_{31}) = 10 + 0 + 0 = 10$ ←-- formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer
- ▷ $0\det(\mathbb{A}_{12}) + 2\det(\mathbb{A}_{22}) + 3\det(\mathbb{A}_{32}) = 0 + 2 \times 5 + 0 = 10$
- ▷ $1\det(\mathbb{A}_{13}) + 0\det(\mathbb{A}_{23}) + 5\det(\mathbb{A}_{33}) = 0 + 0 + 5 \times 2 = 10$

On peut sinon faire apparaitre encore plus de zéros dans la matrice jusqu'à obtenir une matrice triangulaire :
$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 10.$$

Déterminant d'une matrice d'ordre 3 — méthode pratique (règle de Sarrus)

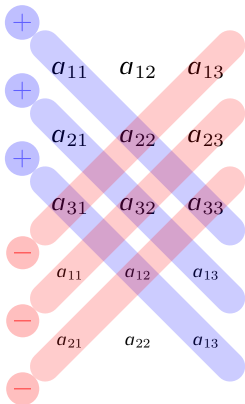
Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n = 3$. Alors

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32}\big) - \big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\big)\end{aligned}$$



ou encore

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{A}) &= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{33}\big) - \big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{31}\big)\end{aligned}$$

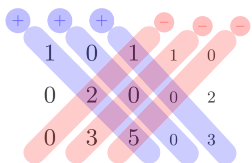


Exemple

Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

alors avec la règle de Sarrus



$$\det(\mathbb{A}) = (1\times 2\times 5 + 0\times 0\times 0 + 1\times 0\times 3) - (1\times 2\times 0 + 1\times 0\times 3 + 0\times 0\times 5) = 10.$$

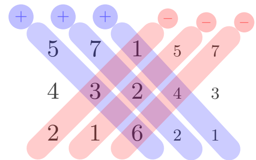
Si on utilise la définition (règle de Laplace), en développant selon la première colonne on obtient

$$\det(\mathbb{A}) = 1\times\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2\times 5 - 0\times 3 = 10.$$

Exemple
Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

alors



$$\det(\mathbb{A}) = (5 \times 3 \times 6 + 7 \times 2 \times 2 + 1 \times 4 \times 1) - (1 \times 3 \times 2 + 5 \times 2 \times 1 + 7 \times 4 \times 6 = -62.$$

Attention
La règle de SARRUS ne s'applique qu'à des matrices d'ordre 3.

Exemple
Soit la matrice d'ordre 4 suivante :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{A}_{11}) - \det(\mathbb{A}_{14}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \big(12+0+2-2-0-0\big) = -(-8) - 12 = -4.$$

Si on essaye de «généraliser» la règle de SARRUS on n'obtient pas le bon résultat :

$$\big(1\times0\times0\times0+0\times1\times4\times1+0\times0\times1\times2+1\times2\times2\times3\big) - \big(1\times1\times2\times1+1\times0\times0\times2+0\times2\times4\times3+0\times0\times1\times0\big) = 10.$$

Théorème
$\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.

Propriété
- ▷ $\det(\mathbb{A}^T) = \det(\mathbb{A})$,
- ▷ $\det(\mathbb{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbb{A})}$,
- ▷ $\det(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{B})$.

Définition *Rang*
Le RANG d'une matrice quelconque $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$, noté $\text{rg}(\mathbb{A})$, est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul.

Remarque
Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$. Alors

$$0 \leq \text{rg}(\mathbb{A}) \leq \min(m, n)$$

et $\text{rg}(\mathbb{A}) = 0$ si et seulement si tous les éléments de $\mathbb{A}$ sont nuls.

Exemple

Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&3&1\end{pmatrix}.$$
Le rang de $\mathbb{A}$ est 2 car
- ▷ $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3 donc $s\le\min\{2,3\}$ donc $s=0$, 1 ou 2 ;
- ▷ il existe au moins un élément de $\mathbb{A}$ différent de zéro, donc $s\neq 0$;
- ▷ comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure ;
- ▷ comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s=2$.

Exemple

Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&5&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$$
Le rang de $\mathbb{A}$ est 2 car
- ▷ $\mathbb{A}$ est d'ordre 3×3 donc $s\le 3$, *i.e.* $s=0$, 1, 2 ou 3 ;
- ▷ il existe au moins un élément de $\mathbb{A}$ différent de zéro, donc $s\neq 0$;
- ▷ le déterminant de $\mathbb{A}$ est 0 donc $s\neq 3$;
- ▷ le déterminant de la sous-matrice $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&5\end{smallmatrix}\right)$ est non nul, donc $s=2$.

Opérations élémentaires sur les matrices

Définition *Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrices*

Les opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes d'une matrices $\mathbb{M}\in\mathcal{M}_{m,n}$ sont
- ▷ la multiplication d'une ligne L_i par un scalaire non nul α :
$$L_i\leftarrow\alpha L_i;$$
- ▷ l'addition d'un multiple d'une ligne αL_j à une autre ligne L_i :
$$L_i\leftarrow L_i+\alpha L_j;$$
- ▷ l'échange de deux lignes :
$$L_i\leftrightarrow L_j.$$

Ces transformations sont équivalentes à la multiplication à gauche (pré-multiplication) de la matrice $\mathbb{M}\in\mathcal{M}_{m,n}$ par la matrice inversible obtenue en appliquant à la matrice identité $\mathbb{I}_m$ la transformation correspondante. Par exemple, la transformation qui échange les premières deux lignes de la matrice $\mathbb{M}\in\mathcal{M}_{4,3}$ suivante
$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\\p&q&r\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2}\begin{pmatrix}d&e&f\\a&b&c\\g&h&i\\p&q&r\end{pmatrix}$$
équivaut à multiplier $\mathbb{M}$ à gauche par la matrice obtenue en échangeant les premières deux lignes de la matrice identité $\mathbb{I}_4$:
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\\p&q&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&e&f\\a&b&c\\g&h&i\\p&q&r\end{pmatrix}$$

Définition *Opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrices*

Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice $\mathbb{M}\in\mathcal{M}_{m,n}$ sont
- ▷ la multiplication d'une colonne par un scalaire non nul :
$$C_i\leftarrow\alpha C_i;$$
- ▷ l'addition d'un multiple d'une colonne à une autre colonne :
$$C_i\leftarrow C_i+\alpha C_j;$$

▷ l'échange de deux colonnes :

$$C_i \leftrightarrow C_j.$$

Ces transformations sont équivalentes à la multiplication à droite (post-multiplication) de la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}$ par la matrice inversible obtenue en appliquant à la matrice identité $\mathbb{I}_n$ la transformation correspondante. Par exemple la transformation qui échange les deux premières colonnes de la matrice $\mathbb{M}$ précédente s'obtient comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \\ q & p & r \end{pmatrix}$$

Définition *Matrices* ÉQUIVALENTES

Deux matrices sont dites ÉQUIVALENTES si on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires.

Théorème

Deux matrices équivalentes ont le même rang.

Exercices

Exercice 1.1

Soients les matrices

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}-3&2\\0&4\\1&-1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{A}-2\mathbb{B}-\mathbb{C}=\mathbb{O}$.
2. Trouver une matrice $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C}-4\mathbb{D}=\mathbb{O}$.

Correction.

1. On cherche $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{C}=\mathbb{A}-2\mathbb{B}$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\0&4\\1&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2\times1&2-2\times2\\0-2\times0&4-2\times1\\1-2\times1&-1-2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2\\0&2\\-1&-3\end{pmatrix}.$$

$\mathbb{A}-2\mathbb{B}-\mathbb{C}=\mathbb{O}$.

2. On cherche $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{D}=\frac{1}{4}(\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{C})=\frac{1}{4}(\mathbb{A}+\mathbb{B}+\mathbb{A}-2\mathbb{B})=\frac{1}{2}\mathbb{A}-\frac{1}{4}\mathbb{B}$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\\d_{31}&d_{32}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&2\\0&4\\1&-1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times(-3)-\frac{1}{4}\times1&\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{4}\times2\\\frac{1}{2}\times0-\frac{1}{4}\times0&\frac{1}{2}\times4-\frac{1}{4}\times1\\\frac{1}{2}\times1-\frac{1}{4}\times1&\frac{1}{2}\times(-1)-\frac{1}{4}\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/4&1/2\\0&7/4\\1/4&-3/4\end{pmatrix}.$$

Exercice 1.2

Effectuer les multiplications suivantes

$$\begin{pmatrix}3&1&5\\2&7&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\3&0&1&8\\0&-5&3&4\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}.$$

Correction.

$$\overbrace{\begin{pmatrix}3&1&5\\2&7&0\end{pmatrix}}^{2\times3}\times\overbrace{\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\3&0&1&8\\0&-5&3&4\end{pmatrix}}^{3\times4}$$
$$=\overbrace{\begin{pmatrix}3\times2+1\times3+5\times0&3\times1+1\times0+5\times(-5)&3\times(-1)+1\times1+5\times3&3\times0+1\times8+5\times4\\2\times2+7\times3+0\times0&2\times1+7\times0+0\times(-5)&2\times(-1)+7\times1+0\times3&2\times0+7\times8+0\times4\end{pmatrix}}^{2\times4}$$
$$=\begin{pmatrix}9&-22&13&28\\25&2&5&56\end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}}^{1\times3}\times\overbrace{\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}}^{3\times1}=\overbrace{\begin{pmatrix}-3\times2+0\times(-4)+5\times(-3)\end{pmatrix}}^{1\times1}=-21$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}}^{3\times1}\times\overbrace{\begin{pmatrix}-3&0&5\end{pmatrix}}^{1\times3}=\overbrace{\begin{pmatrix}2\times(-3)&2\times0&2\times5\\-4\times(-3)&-4\times0&-4\times5\\-3\times(-3)&-3\times0&-3\times5\end{pmatrix}}^{3\times3}=\begin{pmatrix}-6&0&10\\12&0&-20\\9&0&-15\end{pmatrix}$$

Exercice 1.3

Calculer a, b, c et d tels que

$$① \begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\mathbb{I}_2, \qquad ② \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}=\mathbb{I}_2.$$

Que peut-on conclure ?

Correction. Comme

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3c&b+3d\\2a+8c&2b+8d\end{pmatrix}$$

il faut que

$$\begin{cases}a+3c=1,\\b+3d=0,\\2a+8c=0,\\2b+8d=1,\end{cases}\qquad\iff\qquad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3/2\\-1&1/2\end{pmatrix}.$$

De la même manière, pour avoir

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b&3a+8b\\c+2d&3c+8d\end{pmatrix}$$

il faut que

$$\begin{cases}a+2b=1,\\3a+8b=0,\\c+2d=0,\\3c+8d=1,\end{cases}\qquad\iff\qquad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3/2\\-1&1/2\end{pmatrix}.$$

On conclut que

$$\mathbb{A}^{-1}=\begin{pmatrix}4&-3/2\\-1&1/2\end{pmatrix}.$$

Exercice 1.4

On dit que deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ commutent si $\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\mathbb{B}\times\mathbb{A}$. Trouver toutes les matrices qui commutent avec

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

Correction. On cherche $\mathbb{B}$ telle que

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

Comme

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\3b_{21}&3b_{22}&3b_{23}\\5b_{31}&5b_{32}&5b_{33}\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&3b_{12}&5b_{13}\\b_{21}&3b_{22}&5b_{23}\\b_{31}&3b_{32}&5b_{33}\end{pmatrix}$$

il faut que

$$\begin{cases} b_{11} = b_{11}, \\ b_{12} = 3b_{12}, \\ b_{13} = 5b_{13}, \\ 3b_{21} = b_{21}, \\ 3b_{22} = 3b_{22}, \\ 3b_{23} = 5b_{23}, \\ 5b_{31} = b_{31}, \\ 5b_{32} = 3b_{32}, \\ 5b_{33} = 5b_{33}, \end{cases} \iff \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.5

Pour quelle valeur de x la trace de la matrice $\mathbb{A}$ est minimale ? Et pour quelle valeur de x est-elle maximale ?

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2x^3 & 4 & 1 \\ 0 & 3x^2 & 2 \\ 5 & 6 & -12x \end{pmatrix}.$$

Correction. Notons $y : x \mapsto \operatorname{tr}(\mathbb{A})$; on a

$$y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

Une brève étude de la fonction montre que
- ▷ $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm\infty$
- ▷ $y'(x) = 6(x^2 + x - 2)$
- ▷ y est croissante pour $x < -2$ et $x > 1$, décroissante pour $-2 < x < 1$,

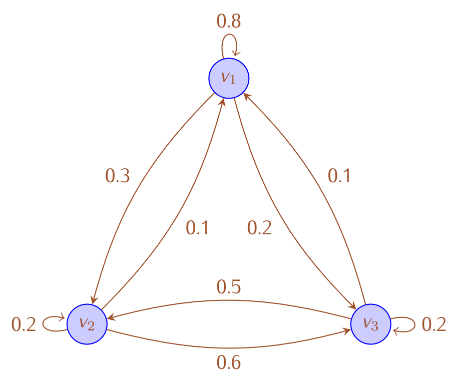
par conséquent on a un maximum local pour $x = -2$ et un minimum local pour $x = 1$.

Chaîne de Markov

v_1, v_2 et v_3 sont trois villes. Des trafiquants de drogue prennent leur marchandise le matin dans n'importe laquelle de ces villes pour l'apporter le soir dans n'importe quelle autre. On notera p_{ij} la probabilité qu'une marchandise prise le matin dans la ville v_i soit rendue le soir dans la ville v_j. On construit ainsi la matrice $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_3([0;1])$, appelée *matrice de transition de la chaîne de* Markov. On remarque que la somme des composantes de chaque vecteur colonne est égale à 1.
Supposons que $\mathbb{P}$ soit connue et vaille

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Les trafiquants se promenant de ville en ville, il peut être utile de visualiser leurs déplacements par le diagramme de transition suivant :



On notera $x_i^{(k)}$ la proportion de trafiquants qui se trouvent au matin du jour k dans la ville v_i. On montre que le vecteur $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})^T$ vérifie la relation

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{P} \cdot \mathbf{x}^{(k)}$$

et donc par une récurrence immédiate

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{P}^k \cdot \mathbf{x}^{(0)}.$$

Supposons que le chef de la mafia locale dispose de 1000 trafiquants qui partent tous le matin du jour 0 de la ville v_1. Quelle sera la proportion de trafiquants dans chacune des villes au bout d'une semaine ? d'un an ?
Il s'agit de calculer des puissances successives de $\mathbb{P}$ avec $\mathbf{x}^{(0)} = (1,0,0)^T$. Comme on ne connaît pas encore la notion de valeur propre et le lien avec le calcul des puissances de matrices, on pourra utiliser un logiciel qui réalise ce calcul. Au bout d'une semaine on a

$$\mathbf{x}^{(7)} = \mathbb{P}^7 \cdot \mathbf{x}^{(0)} \simeq (56.4\%, 22.6\%, 21\%)^T.$$

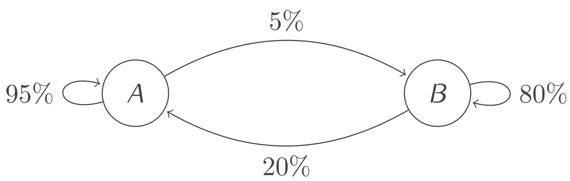
Au but d'un an les proportions ne changent guère :

$$\mathbf{x}^{(365)} = \mathbb{P}^{365} \cdot \mathbf{x}^{(0)} \simeq (55.7\%, 22.9\%, 21.3\%)^T.$$

Exercice 1.6 *Migration entre deux villes*

Deux villes A et B totalisent une population d'un million d'habitants. La ville A est plus agréable, mais la ville B offre plus de possibilités d'emplois. 20% des habitants de B partent chaque année habiter A pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de A partent chaque année habiter B pour trouver un meilleur emploi. Sachant qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en A, quelle est la population de A et de B au bout de 1 an, 2 ans, 4 ans, 9 ans ?

Correction. On résume les informations dans un graphe de transition :



Les sommets du graphes correspondent aux différents états possibles (ici, habiter la ville A ou la ville B), et les flèches donnent le pourcentage de gens qui passent d'un état à un autre, d'une année sur l'autre.

La suite des états successifs est décrite par une relation de récurrence linéaire, de la forme $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbb{T}\mathbf{x}_n$. Le vecteur $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'état du système, *i.e.* le vecteur (a_n, b_n) où a_n est la population de la ville A après n années et b_n est la population de la ville B après n années, et la matrice $\mathbb{T}$ est la matrice de transition. Ainsi,

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 95\% & 20\% \\ 5\% & 80\% \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbb{T}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 95\% & 20\% \\ 5\% & 80\% \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{80} \\ \frac{49}{80} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3875 \\ 0.6125 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbb{T}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 95\% & 20\% \\ 5\% & 80\% \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{31}{80} \\ \frac{49}{80} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{157}{320} \\ \frac{163}{320} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90625 \\ 0.509375 \end{pmatrix}$$

ou, en utilisant les puissances de matrice,

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbb{T}^2\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{73}{80} & \frac{7}{20} \\ \frac{7}{80} & \frac{13}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{157}{320} \\ \frac{163}{320} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90625 \\ 0.509375 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \mathbb{T}^4\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{221}{256} & \frac{35}{64} \\ \\ \frac{35}{256} & \frac{29}{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{641}{1024} \\ \\ \frac{383}{1024} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.6259765625 \\ \\ 0.3740234375 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(9)} = \mathbb{T}^9\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1068259}{1310720} & \frac{242461}{327680} \\ \\ \frac{242461}{1310720} & \frac{85219}{327680} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3977791}{5242880} \\ \\ \frac{1265089}{5242880} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.7587034225 \\ \\ 0.2412965775 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

autrement dit la suite converge vers un état où le 80% de la population se trouve dans la la ville A et 20% dans la ville B.

Exercice 1.7

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction.

1. $\det(\mathbb{A}) = 1 \times 5 - 3 \times (-7) = 26$.
2. En développant par rapport à la dernière ligne qui contient deux zéros on trouve

$$\det(\mathbb{B}) = (-1)^{3+2} \times (-2) \times \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 2 \times (2 \times 7 - 3 \times 5) = -2.$$

3. On fait apparaître des zéros sachant que le déterminant ne change pas lorsque on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{C}) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[=]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times (2) \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[=]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}} 2 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= 2 \times \left((-1)^{1+1} \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \right) = 2 \times (3 \times (-4) - 0 \times 4) = -24.
\end{aligned}$$

Exercice 1.8 *CC Novembre 2012*

Trouver pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont inversibles :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} t+3 & t^2-9 \\ t^2+9 & t-3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} t^2-9 & t+3 \\ t-3 & t^2+9 \end{pmatrix}.$$

Correction.

$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} t+3 & t^2-9 \\ t^2+9 & t-3 \end{pmatrix} = (t+3)\times(t-3)-(t^2-9)\times(t^2+9) = -(t-3)(t+3)(t^2+8).$$

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

$$\det(\mathbb{B}) = \det\begin{pmatrix} t^2-9 & t+3 \\ t-3 & t^2+9 \end{pmatrix} = (t^2-9)\times(t^2+9)-(t+3)\times(t-3) = (t-3)(t+3)(t^2+8).$$

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

Exercice 1.9 *CT Janvier 2011*

Trouver pour quelles valeurs de t la matrice suivante est inversible

$$\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}.$$

Correction. On commence par calculer le déterminant de la matrice. Étant une matrice d'ordre 3, on peut par exemple utiliser la méthode de Sarrus :

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} \\
&= \Big((t+3)\times(t-3)\times(t+4)+5\times(-6)\times 1+6\times(-1)\times 1\Big)-\Big(1\times(t-3)\times 6+1\times(-6)\times(t+3)+(t+4)\times(-1)\times 5\Big) \\
&= t^3-4t+4t^2-16 = t(t^2-4)+4(t^2-4) = (t^2-4)(t+4) = (t-2)(t+2)(t+4).
\end{aligned}$$

La matrice est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-4,-2,2\}$.

Exercice 1.10 *Calculs de déterminants*

Soit a, b et c trois réels quelconques, calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \det\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Correction. Pour calculer un déterminant comportant des paramètres, il est souvent intéressant de faire apparaître des zéros dans une ligne ou une colonne :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[=]{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1 \\ C_3\leftarrow C_3-C_1}} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)\Big((c+a)-(b+a)\Big) = (b-a)(c-a)(c-b); \\
D_2 &= \det\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} = (1+a)^3+1+1-(1+a)-(1+a)-(1+a) = (1+a)^3-3(1+a)+2 \\
&= \Big((1+a)-1\Big)\Big((1+a)^2+(1+a)-2\Big) = \Big((1+a)-1\Big)\Big((1+a)+2\Big)\Big((1+a)-1\Big) = a^2(3+a).
\end{aligned}$$

Exercice 1.11 *CC Octobre 2011*

1. Pour quelles valeurs de $\kappa \in \mathbb{R}$ la matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible ?
2. Calculer le rang de la matrice $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$.
3. Calculer le rang de la matrice $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 12 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. La matrice $\mathbb{A}$ est inversible pour $\kappa \neq \frac{3}{2}$ car $\det(\mathbb{A}) = 3 - 2\kappa$.
2. Sans faire de calcul on peut déjà affirmer que $1 \le \operatorname{rg}(\mathbb{B}) \le 3$. Comme $\det(\mathbb{B}) = 0$ (sans faire de calcul, il suffit de remarquer que $C_3 = 4C_2$), alors $1 \le \operatorname{rg}(\mathbb{B}) \le 2$. Comme $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$, on conclut que $\operatorname{rg}(\mathbb{B}) = 2$.
3. Sans faire de calcul on peut déjà affirmer que $1 \le \operatorname{rg}(\mathbb{C}) \le 3$. Comme $\det(\mathbb{C}) = 0$ (sans faire de calcul, il suffit de remarquer que $L_2 = 4L_1$), alors $1 \le \operatorname{rg}(\mathbb{C}) \le 2$. Comme $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, on conclut que $\operatorname{rg}(\mathbb{C}) = 2$.
4. $\det(\mathbb{D}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ \boxed{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -16.$
5. $\det(\mathbb{E}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 7 & 12 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ \boxed{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 16.$

Exercice 1.12 *F. Le Roux*

En admettant le fait que les nombres 2001, 1073, 5800 et 8903 sont tous divisibles par 29, montrer que le déterminant de la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est aussi divisible par 29 (*sans* calculer ce déterminant !).

Correction. Le déterminant ne change pas lorsque on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Si on ajoute à la quatrième colonne la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{3} 10^{4-i}C_i$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{3} 10^{4-i}C_i + C_4 = 10^3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 10^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2001 \\ 1073 \\ 5800 \\ 8903 \end{pmatrix} = 29\begin{pmatrix} 69 \\ 37 \\ 200 \\ 307 \end{pmatrix}$$

donc

$$\det(\mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 29\times 69 \\ 1 & 0 & 7 & 29\times 37 \\ 5 & 8 & 0 & 29\times 200 \\ 8 & 9 & 0 & 29\times 307 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.13

Soit $n \geq 2$ un entier naturel pair. Une matrice de taille $n \times n$ est à remplir par deux joueurs, A (qui veut un déterminant non nul, commence) et B (qui veut un déterminant nul). Ils ont le droit de mettre n'importe quel réel dans une case vide de la matrice, chacun leur tour. Trouver une stratégie gagnante pour B.

Correction. Il suffit de faire en sorte qu'une colonne soit identique (ou un multiple) d'une autre.

2

Systèmes linéaires

Définition *Système linéaire*

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- ▷ Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$. Les INCONNUES $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{K}$.
- ▷ Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- ▷ Une SOLUTION de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- ▷ Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution. Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- ▷ Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.

Écriture matricielle

Si on note

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le système (S) est équivalent à l'écriture matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Équilibrage de réactions chimiques

Du point de vue mathématique, équilibrer une réaction chimique signifie trouver des coefficients (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$), appelés coefficients stœchiométriques, qui satisfont certaines contraintes comme la conservation du nombre d'atomes, ou la conservation du nombre d'électrons (pour les réactions red-ox), ou la conservation de la charge (pour les réactions écrites sous forme ionique). Toutes ces contraintes dépendent linéairement des coefficients stœchiométriques, ce qui amène tout naturellement à l'écriture d'un système linéaire.

Par exemple, considérons la réaction

$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

Notons x_1, x_2 et x_3 les coefficients stœchiométriques

$$x_1H_2 + x_2O_2 \to x_3H_2O.$$

Les contraintes sont :

1. la conservation du nombre d'atomes d'hydrogène : $2x_1 = 2x_3$,
2. la conservation du nombre d'atomes d'oxygène : $2x_2 = x_3$.

On note qu'on a 3 inconnues mais seulement 2 équations linéairement indépendantes ; en effet, les coefficients stœchiométriques ne définissent pas des quantités absolues mais seulement les rapports entre les différents éléments. Par conséquent, si (x_1, x_2, x_3) équilibre la réaction, alors tous les multiples entiers de (x_1, x_2, x_3) équilibrent aussi la réaction.

Pour résoudre le problème sans paramètres, fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_3 = 1$. On doit alors resoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Si nous voulons des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit de multiplier tous les coefficients par 2 et on a ainsi

$$2H_2 + 1O_2 \to 2H_2O.$$

Partage de secrets

Comment envoyer un message secret avec plusieurs espions sans pour autant que ceux-ci ne connaissent le contenu du message envoyé ?

Typiquement, un message à envoyer est un nombre entier (car, par codage, on peut remplacer un texte quelconque par un nombre). Imaginons donc que l'on désire envoyer le nombre n. Considérons un polynôme de degré k, par exemple à coefficients entiers, $P(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + n$ dont le terme indépendant vaut exactement n. En particulier, on a $P(0) = n$. Un corollaire du théorème fondamental de l'algèbre stipule que si deux polynômes de degré k sont égaux en $k+1$ points, alors ils sont égaux. Autrement dit, le polynôme P est complétement caractérisé par les valeurs qu'il prend par exemple aux entiers $1, 2, \dots, k+1$. On engage alors $k+1$ espions (voire un peu plus, si certains étaient capturés par les «ennemis»). On donne au i-ème espion le nombre $P(i)$. Les espions se dispersent (par exemple, pour passer les lignes ennemies). Une fois que $k+1$ espions sont arrivés à destination, il est aisé de reconstituer le polynôme (on a *un système de $k+1$ équations linéaires* pour retrouver les $k+1$ coefficients de P) et ainsi retrouver la valeur secrète n. Si un espion est capturé et qu'il parle, les ennemis auront à leur disposition un des $P(i)$, mais cela ne leur permet nullement de retrouver n. De même, si un espion étaient en fait un agent double, connaître $P(i)$ seul ne sert à rien.
Source : `http://michelrigo.wordpress.com/2010/01/30/partage-de-secrets-et-tfa/`

Méthodes de résolution

Définition *Système échelonné*

Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcl}
5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\
 & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\
 & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\
 & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\
 & & & & & 0 & = & b_5
\end{array}\right.$$

Réduction

Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_p = b,$$

- ▷ si $b \neq 0$ le système est impossible,
- ▷ si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit SYSTÈME RÉDUIT.

Définition *Matrice augmentée*

Si on ajoute le vecteur-colonne des seconds membres $\mathbf{b}$ à la matrice des coefficients $\mathbb{A}$, on obtient ce qu'on appelle la matrice augmentée que l'on note $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$.

Méthode du pivot de Gauss

Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S) et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$ la matrice augmentée.

La méthode du pivot de Gauss comporte $n-1$ étapes : à chaque étape j on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i > j$ par des opérations élémentaires sur les lignes.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes de la matrice augmentée (*i.e.* deux équations du système linéaire), on peut supposer $a_{jj} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j,$$

ainsi on fait apparaître des 0 sur la colonne j pour les lignes $i > j$ (*i.e.* on élimine l'inconnue x_j dans chaque lignes L_i du système linéaire).

En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné.

Exemple

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

1. Résolution par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape 2}]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Étape 3}]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

   donc, en résolvant le système triangulaire supérieur obtenu, on obtient

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

2. Résolution par la méthode du pivot de Gauss en écriture matricielle :

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Étape 2}]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Étape 3}]{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array}\right)$$

   donc

$$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Définition *Rang*

Le nombre d'équations non triviales du système réduit en escalier obtenu par la méthode de Gauss est le RANG r DE LA MATRICE $\mathbb{A}$, OU DU SYSTÈME (S).

Théorème

Un système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m équations à n inconnues est compatible si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$.

1. Si le système a n équations et n inconnues, la matrice $\mathbb{A}$ est carrée d'ordre n et 3 situations peuvent se présenter :
   1.1. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = n$ (*i.e.* si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$) alors $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ et la solution est unique.
   1.2. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) < n$ il y a une infinité de solutions.
   1.3. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) \neq \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.
2. Si le système a m équations et n inconnues avec $m > n$ alors 3 situations peuvent se présenter :
   2.1. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = n$ la solution est unique.
   2.2. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) < n$ il y a une infinité de solutions.
   2.3. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) \neq \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.
3. Si le système a m équations et n inconnues avec $m < n$ alors 2 situations peuvent se présenter :
   3.1. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \le m < n$ il y a une infinité de solutions.
   3.2. Si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) \neq \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ il n'y a pas de solution.

Remarque

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,p}$ la matrice des coefficients du système (S). Alors

$$0 \le \operatorname{rg}(\mathbb{A}) \le \min\{\, n, p \,\}$$
$$\operatorname{rg}(\mathbb{A}) \le \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \le \min\{\, n, p+1 \,\}.$$

Exemple

On veut résoudre les systèmes linéaires suivants de 2 équations et 2 inconnues :

$$① \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$$

Les matrices augmentées associées à chaque système sont

$$① \ [\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad ② \ [\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \qquad ③ \ [\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

et on a

① $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc il existe une et une seule solution. En effet,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x+y=1 \\ -2y=0 \end{cases}$$

ainsi la solution est $y=0$ et $x=1$;

② $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 1$ donc il existe une infinité de solutions. En effet,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x+y=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

ainsi la solution est $y=\kappa$ et $x=1-\kappa$ pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$;

③ $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = 1$ et $\operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc il n'y a pas de solution. En effet

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x+y=1 \\ 0=-1 \end{cases}$$

et la dernière équation est impossible.

Exemple

1. n équations et n inconnues :
   1.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \\ -4 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 3$ (car $\det(\mathbb{A}) \neq 0$) donc $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])$ et la solution est unique.
   1.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -26 \\ -22 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.
   1.3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -26 \\ -20 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 2 \neq \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ donc il n'y a pas de solution.
2. m équations et n inconnues avec $m > n$:
   2.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc la solution est unique.
   2.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.
   2.3. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 2 \neq \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ donc il n'y a pas de solution.
3. m équations et n inconnues avec $m < n$:
   3.1. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2 < 3$ donc il y a une infinité de solutions.
   3.2. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 1 \neq \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ donc il n'y a pas de solution.

Méthode de Gauss-Jordan

Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S) et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$ la matrice augmentée.

Dans cette variante de la méthode du pivot de Gauss, à chaque étape on fait apparaître des zéros à la fois au-dessus et en-dessous du pivot.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes de la matrice augmentée, on peut supposer $a_{jj} \neq 0$. On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i \neq j$ selon la règle

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

ainsi on élimine l'inconnue x_j dans toutes les lignes L_i.

En réitérant le procédé pour i de 1 à n, on aboutit à un système diagonal.

Exemple

Résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Gauss-Jordan.

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Étape 1}]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Étape 2}]{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -10 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Étape 3}]{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3/4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Étape 4}]{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 11L_4/40 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 9L_4/40 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_4/40}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array}\right)$$

donc

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Définition *Système de Cramer*

Un système est dit de Cramer s'il a une solution, et une seule.

Propriété

Considérons un système carré d'ordre n à coefficients réels. Le système est de Cramer si une des conditions équivalentes suivantes est remplie :

1. $\mathbb{A}$ est inversible ;
2. $\text{rg}(\mathbb{A}) = n$;
3. le système homogène $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet seulement la solution nulle.

Méthode de Cramer

La solution d'un système de Cramer d'écriture matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par

$$x_j = \frac{\det(\mathbb{A}_j)}{\det(\mathbb{A})}, \qquad 1 \le j \le n$$

où $\mathbb{A}_j$ est la matrice obtenue à partir de $\mathbb{A}$ en remplaçant la j-ème colonne par la colonne des seconds membres $\mathbf{b}$.

Cette formule est cependant d'une utilité pratique limitée à cause du calcul des déterminants qui est très couteux.

Exemple *Système d'ordre 2*

On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Cramer. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_1) = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_2) = a_{11} b_2 - b_1 a_{21},$$

donc

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Exemple

On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

par la méthode de CRAMER. On a

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\3&2&0\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A})=2,$$
$$\mathbb{A}_1=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_1)=-6,$$
$$\mathbb{A}_2=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-1&0\\3&1&0\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_2)=10,$$
$$\mathbb{A}_3=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_3)=10,$$

donc

$$x=\frac{-6}{2}=-3, \qquad y=\frac{10}{2}=5, \qquad z=\frac{10}{2}=5.$$

Définition *Cofacteur & comatrice*

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i,j) d'entiers, $1\le i,j\le n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de $\mathbb{A}$. On appelle COFACTEUR de l'élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\det(\mathbb{A}_{ij})$. On appelle COMATRICE de $\mathbb{A}$ la matrice constituée des cofacteurs de $\mathbb{A}$.

Exemple

Soit $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Alors la matrice des cofacteurs de $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}$.

Calcul de $\mathbb{A}^{-1}$

$\mathbb{A}$ étant inversible, pour obtenir $\mathbb{A}^{-1}$ il suffit de résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ qui admet pour solution $\mathbf{x}=\mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$. On peut alors calculer $\mathbb{A}^{-1}$ en résolvant n systèmes linéaires de termes sources $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, …, $(0,0,0,\dots,1)$. Les méthodes suivantes résolvent ces n systèmes linéaires simultanément.

<u>Première méthode.</u>

1. On calcul la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$;
2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$;
3. on divise par $\det(\mathbb{A})$.

Cette méthode est quasi-impraticable dès que $n>3$.

<u>Deuxième méthode.</u>

La matrice $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si on obtient par opérations élémentaires sur les lignes de $\mathbb{A}$ une matrice triangulaire sans zéros sur la diagonale ; non inversible si et seulement si on obtient une matrice triangulaire avec un zéro sur la diagonale. Si $\mathbb{A}$ est inversible, on effectue les mêmes opérations sur la matrice $[\mathbb{A}|\mathbb{I}_n]$ jusqu'à obtenir $[\mathbb{I}_n|\mathbb{A}^{-1}]$:

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_n] \xrightarrow{\text{Opérations élémentaires}} [\mathbb{I}_n|\mathbb{A}^{-1}].$$

Exemple

Soit $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ avec $\det(\mathbb{A})=ad-bc\neq 0$.

<u>Première méthode :</u> on a déjà calculé le déterminant de cette matrice ainsi que la matrice des cofacteurs, il suffit alors de calculer la transposée et on obtient

$$\mathbb{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

<u>Deuxième méthode :</u> on parvient au même résultat par transformations élémentaires :

$$
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_2]=\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\frac{c}{a}L_1}\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0\\ 0 & d-\frac{c}{a}b & -\frac{c}{a} & 1\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[L_2=L_1-\frac{ab}{ad-bc}L_2]{L_1\leftarrow L_1-\frac{b}{d-\frac{c}{a}b}}\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc}\\ 0 & d-\frac{c}{a}b & -\frac{c}{a} & 1\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[L_2\leftarrow\frac{1}{d-\frac{c}{a}b}L_2=\frac{a}{ad-cb}L_2]{L_1\leftarrow\frac{1}{a}L_1}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a}+\frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{ab}{ad-bc}\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc}\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb}\end{array}\right)
$$

Exemple

Calculer l'inverse de la matrice

$$
\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.
$$

<u>Première méthode.</u>

1. On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$:
$$
\text{comatrice}=\begin{pmatrix}
(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\
(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\
(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix};
$$
2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$:
$$
\text{comatrice}^T=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix};
$$
3. on divise par $\det(\mathbb{A})$:
$$
\mathbb{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}.
$$

<u>Deuxième méthode.</u>

$$
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_3]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ \boxed{0} & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\ \boxed{0} & -2 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2/2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+2L_2]{L_1\leftarrow L_1-L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{0} & -1 & 1/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & \boxed{0} & 2 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3/2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & 1/2\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{0} & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2\end{array}\right)=[\mathbb{I}_3|\mathbb{A}^{-1}].
$$

Astuces

Astuce

Soit r le rang du système (S) et p le nombre d'inconnues.

- ▷ Si $r=p$, (S) a une unique solution,
- ▷ si $r<p$, (S) a une infinité de solutions. Les r inconnues qui figurent au début des r équations issues de la méthode du pivot de Gauss sont les inconnues principales. Elles peuvent se calculer de façon unique en fonction des autres $p-r$ inconnues.
  Le choix des inconnues principales d'un système est arbitraire, mais leur nombre est toujours le même.

Astuce

Pour résoudre un système (S) de m équations à n inconnues où $m > n$ on considère un sous-système carré (S') de n équations à n inconnues et on résout ce système :

- ▷ si (S') n'admet pas de solution, alors (S) non plus ;
- ▷ si (S') admet une unique solution $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, alors on vérifie si cette solution vérifie les autres $m - n$ équations du système (S) :
  - ▹ si oui, alors (S) admet l'unique solution $(c_1, c_2, \dots, c_n)$,
  - ▹ si non, alors (S) n'admet pas de solution ;
- ▷ si (S') admet une infinité de solutions, on cherche parmi ces solutions celles qui vérifient également les autres équations de (S).

Remarque

On n'a décrit qu'un seul algorithme de résolution, l'algorithme de Gauss. Or cet algorithme est bien insuffisant pour résoudre numériquement, c'est-à-dire sur ordinateur, les énormes systèmes linéaires rencontrés dans la pratique. L'analyse numérique matricielle est l'étude d'algorithmes efficaces dans le but de résoudre effectivement et efficacement de tels systèmes. C'est un vaste champ de recherche toujours très actif de nos jours.

Exercices

Exercice 2.1

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$
① \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2\\ x_1-2x_2-3x_3=-6\\ x_1+4x_2+4x_3=3 \end{cases}
\qquad
② \begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8\\ 4x_1+x_2-4x_3=15 \end{cases}
\qquad
③ \begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ u+v-3w=-6 \end{cases}
$$

Correction. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

①

$$
\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2-3x_3=-6,\\ x_1+4x_2+4x_3=3. \end{cases}
\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}
\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ -4x_2-2x_3=-8,\\ 2x_2+5x_3=1. \end{cases}
\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2/2}
\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ -4x_2-2x_3=-8,\\ 4x_3=-3. \end{cases}
$$

donc $x_3=\frac{-3}{4}$, $x_2=\frac{19}{8}$ et $x_1=\frac{-7}{2}$.

②

$$
\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8\\ 4x_1+x_2-4x_3=15 \end{cases}
\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+4L_1]{L_2\leftarrow L_2+2L_1}
\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ x_2+8x_3=16\\ 5x_2+8x_3=63 \end{cases}
\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-5L_2}
\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12\\ x_2+8x_3=16\\ -32x_3=-17 \end{cases}
$$

donc $x_3=\frac{17}{32}$, $x_2=\frac{47}{4}$ et $x_1=\frac{43}{32}$.

③

$$
\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ u+v-3w=-6 \end{cases}
\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_1/2}
\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ -v-\frac{3}{2}w=-13/2 \end{cases}
\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2/2}
\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ -2w=-6 \end{cases}
$$

donc $w=3$, $v=2$ et $u=1$.

Exercice 2.2

Résoudre le système linéaire

$$
\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2x+3y+3z+2t=14\\ x+2y+z+t=7\\ -x-z+t=-1 \end{cases}
$$

Correction. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$
\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2x+3y+3z+2t=14\\ x+2y+z+t=7\\ -x-z+t=-1 \end{cases}
\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_1/2]{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1/2}}
\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ \frac{3}{2}y+z+3t=8\\ \frac{1}{2}y-z-t=-2 \end{cases}
$$

$$
\xrightarrow[L_4\leftarrow L_2-L_2/4]{L_3\leftarrow L_3-3L_2/4}
\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4\\ -\frac{7}{4}z-\frac{5}{2}t=-6 \end{cases}
\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-7L_3/5}
\begin{cases} -2x-y+4t=2\\ 2y+3z+6t=16\\ -\frac{5}{4}z-\frac{3}{2}t=-4\\ -\frac{2}{5}t=-\frac{2}{5} \end{cases}
$$

donc $t=4$, $z=2$, $y=2$ et $x=0$.

Exercice 2.3

Soit le système linéaire

$$\begin{pmatrix}6&1&1\\2&4&0\\1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\0\\6\end{pmatrix}.$$

Résoudre les systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss.

Correction.

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{ccc|c}6&1&1&12\\2&4&0&0\\1&2&6&6\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{6}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{6}L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}6&1&1&12\\0&\frac{11}{3}&-\frac{1}{3}&-4\\0&\frac{11}{6}&\frac{35}{6}&4\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{\frac{11}{6}}{\frac{11}{3}}L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}6&1&1&12\\0&\frac{11}{3}&-\frac{1}{3}&-4\\0&0&6&6\end{array}\right)$$

donc

$$\begin{cases}6x_1+x_2+x_3=12,\\ \frac{11}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3=-4\\ 6x_3=6\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad x_3=1,\quad x_2=-1,\quad x_1=2.$$

Exercice 2.4

Résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\\10\end{pmatrix}.$$

par la méthode du pivot de Gauss.

Correction.

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&10\\2&3&4&1&10\\3&4&1&2&10\\4&1&2&3&10\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1\\L_4\leftarrow L_4-4L_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&10\\0&-1&-2&-7&-10\\0&-2&-8&-10&-20\\0&-7&-10&-13&-30\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\L_4\leftarrow L_4-7L_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&10\\0&-1&-2&-7&-10\\0&0&-4&4&0\\0&0&4&36&40\end{array}\right)\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4+L_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&10\\0&-1&-2&-7&-10\\0&0&-4&4&0\\0&0&0&40&40\end{array}\right)$$

donc

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10\\-x_2-2x_3-7x_4=-10\\-4x_3+4x_4=0\\40x_4=40\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad x_4=1,\quad x_3=1,\quad x_2=1,\quad x_1=1.$$

Exercice 2.5

Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases}-2x-y+z=0\\x-2y+z=0\\x+y-2z=0\end{cases}$$

Correction. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -2x & -y & +z=0 \\ x & -2y & +z=0 \\ x & +y & -2z=0 \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1/2]{L_2\leftarrow L_2+L_1/2} \begin{cases} -2x & -y & +z=0 \\ & -3/2y & +3/2z=0 \\ & 3/2y & -3/2z=0 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{cases} -2x & -y & +z=0 \\ & -5/2y & +3/2z=0 \\ & & 0z=0 \end{cases}$$

donc $z=\kappa\in\mathbb{R}$, $y=z$ et $x=z$.

Exercice 2.6

Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ -x_1+2x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Ce système est-il compatible ? Possède-t-il une solution unique ?

Correction.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ -x_1+2x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-x_3=0. \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1/2} \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ -1/2x_2+1/2x_3=0, \\ -2x_2+2x_3=0, \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-4L_2} \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ -1/2x_2+1/2x_3=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

Le système est compatible car le rang du système est 2 inférieur au nombre d'inconnues 3 et la solution n'est pas unique car $\mathrm{rg}(S)<3$. Il admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,\kappa,\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.7

Trouver toutes les solutions du système linéaire homogène

$$(S)\quad \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0, \\ -2x_1+2x_3=0, \\ -11x_1+6x_2+5x_3=0. \end{cases}$$

Correction. Le système étant homogène, il est inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de Gauss :

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -11 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-11L_1/3]{L_2\leftarrow L_2-2L_1/3} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 7/3 & -7/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+7L_2/2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme (κ,κ,κ) avec $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.8

Équilibrer la réaction

$$Zn+H_2SO_4+K_2Cr_2O_7\to KCr(SO_4)_2+ZnSO_4+H_2O.$$

Correction. Écrivons les coefficients stœchiométriques et les contraintes :

$$x_1 Zn + x_2 H_2SO_4 + x_3 K_2Cr_2O_7 \to x_4 KCr(SO_4)_2 + x_5 ZnSO_4 + x_6 H_2O$$

1. Atomes de Zn : $x_1 = x_5$, *i.e.* $x_1 - x_5 = 0$
2. Atomes de H : $2x_2 = 2x_6$, *i.e.* $x_2 - x_6 = 0$
3. Atomes de S : $x_2 = 2x_4 + x_5$, *i.e.* $x_2 - 2x_4 - x_5 = 0$
4. Atomes de K : $2x_3 = x_4$, *i.e.* $2x_3 - x_4 = 0$
5. Atomes de Cr : $2x_3 = x_4$, *i.e.* $2x_3 - x_4 = 0$
6. Atomes de O : $4x_2 + 7x_3 = 8x_4 + 4x_5 + x_6$, *i.e.* $4x_2 + 7x_3 - 8x_4 - 4x_5 - x_6 = 0$

Notons que la contrainte $2x_3 - x_4 = 0$ est répétée deux fois, donc on ne l'écrira qu'une seule fois dans le système linéaire ; cela donne 5 équations pour 6 inconnues. Fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_6 = 1$; on obtient alors le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -8 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_5 \leftarrow L_5 - 4L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & -4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - \frac{7}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - \frac{9}{4}L_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

dont la solution est bien

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 1 \\ 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$$

Si on multiplie tous les coefficients par 7 on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

et donc la réaction équilibrée

$$3Zn + 7H_2SO_4 + K_2Cr_2O_7 \to 2KCr(SO_4)_2 + 3ZnSO_4 + 7H_2O.$$

Exercice 2.9 *V. Guirardel*

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Candidat	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
Qui	7	12	6	8
Quo	11	6	10	9
Qua	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Correction. Il s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ 11m+6a+10i=9,\\ 11m+16a+14i=14.\end{cases}$$

Utilisons la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ 11m+6a+10i=9,\\ 11m+16a+14i=14,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{7}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{11}{7}L_1} \begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7},\\ -\frac{20}{7}a+\frac{32}{7}i=\frac{10}{7},\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{9}L_2} \begin{cases} 7m+12a+6i=8,\\ -\frac{90}{7}a+\frac{4}{7}i=-\frac{25}{7},\\ \frac{40}{9}i=\frac{20}{9},\end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(0.2, 0.3, 0.5)$.

Une autre interprétation est la suivante : il s'agit de trouver les trois coefficients $m, a, i \in [0;1]$ tels que

$$\begin{cases} 7m+12a+6i=8(m+a+i)\\ 11m+6a+10i=9(m+a+i),\\ 11m+16a+14i=14(m+a+i).\end{cases}$$

Utilisons la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 2m-3a+i=0,\\ -3m+2a=0,\end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{11}{7}L_1]{L_2\leftarrow L_2-\frac{11}{7}L_1} \begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 5a-3i=0,\\ -10a+6i=0,\end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{9}L_2} \begin{cases} -m+4a-2i=0,\\ 5a-3i=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa, 3\kappa, 5\kappa)$ avec $\kappa \in [0;1/5]$.

Exercice 2.10 *V. Guirardel*

Une entreprise fabrique des manteaux. Ces manteaux sont composés de tissu rouge, de tissu bleu et d'une doublure noire. Le tableau suivant résume les mètres carrés de chaque tissu nécessaires à la confection du manteau en tailles S, M, L et XL :

	S	M	L	XL
Tissu rouge	0.4	0.5	0.6	0.7
Tissu bleu	1	1.1	1.2	1.3
Doublure	1.5	1.7	1.9	2.1

Chaque tissu est tissé à l'aide de plusieurs types de fil : coton, polyester et polyamide. Le tableau suivant résume les mètres de fil de chaque type nécessaires par mètre carré de tissu :

	Tissu rouge	Tissu bleu	Doublure
Coton	500	400	1000
Polyamide	1000	900	700
Polyester	500	600	0

1. L'entreprise veut produire s manteaux taille S, m manteaux taille M, ℓ manteaux taille L et x manteaux taille XL. Quelle quantité de fil de chaque catégorie doit-elle commander ? Répondre à cette question dans le langage des matrices.
2. En fin d'année, l'entreprise veut écouler entièrement ses stocks de fils. Il lui reste 100 000 m de coton et de polyamide, et 20 000 m de Polyester. Peut-elle transformer entièrement ses stocks de fils en manteaux ?

Correction. Introduisons les deux matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ et les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ suivants

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}0.4&0.5&0.6&0.7\\1&1.1&1.2&1.3\\1.5&1.7&1.9&2.1\end{pmatrix}\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}500&400&1000\\1000&900&700\\500&600&0\end{pmatrix}\qquad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}s\\m\\\ell\\x\end{pmatrix}\qquad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}c\\a\\e\end{pmatrix}$$

1. Pour produire s manteaux taille S, m manteaux taille M, ℓ manteaux taille L et x manteaux taille XL, l'entreprise doit commander c mètres de coton, a mètres de polyamide et e mètres de polyester où c, a, e sont les entrées du vecteur $\mathbf{v}$ suivant :
$$\mathbf{v} = \mathbb{BA}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2100s + 2390m + 2680\ell + 2970x \\ 2350s + 2680m + 3010\ell + 3340x \\ 800s + 910m + 1020\ell + 1130x \end{pmatrix}.$$
2. On cherche s'il existe un vecteur $\mathbf{u}$ tel que
$$\begin{pmatrix} 100000 \\ 100000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \mathbb{BA}\mathbf{u},$$
i.e. s'il existe une solution du système linéaire
$$\begin{pmatrix} 2100 & 2390 & 2680 & 2970 \\ 2350 & 2680 & 3010 & 3340 \\ 800 & 910 & 1020 & 1130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ m \\ \ell \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100000 \\ 100000 \\ 20000 \end{pmatrix}.$$
En appliquant la méthode de Gauss on obtient le système
$$\begin{pmatrix} 2100 & 2390 & 2680 & 2970 \\ 0 & \frac{115}{21} & \frac{230}{21} & \frac{115}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ m \\ \ell \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100000 \\ -\frac{250000}{21} \\ -\frac{440000}{23} \end{pmatrix}$$
qui n'admet pas de solution.

Exercice 2.11

Soit le système linéaire
$$(S) \quad \begin{cases} x - \alpha y = 1, \\ \alpha x - y = 1. \end{cases}$$
Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\alpha & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & -1+\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right).$$

Comme $-1 + \alpha^2 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$ on conclut que
1. si $\alpha = 1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0 = 0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\alpha = -1$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0 = 2$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\alpha \notin \{-1; 1\}$ alors (S) possède une solution unique $x = \frac{1}{\alpha+1}$ et $y = -\frac{1}{\alpha+1}$.

Exercice 2.12 *CC Octobre 2011*

Soit le système linéaire
$$(S) \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + \beta z = 3, \\ x + \beta y + 3z = -3. \end{cases}$$
Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;

2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Correction.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \beta & 3 \\ 1 & \beta & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta+2 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (1-\beta)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta+2 & 1 \\ 0 & 0 & (6-\beta-\beta^2) & -(3+\beta) \end{array}\right).$$

Comme $6-\beta-\beta^2 = (2-\beta)(3+\beta)$ on conclut que

1. si $\beta = -3$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z = 0$) alors (S) possède une infinité de solutions,
2. si $\beta = 2$ (*i.e.* la dernière équation correspond à $0z = -5$) alors (S) ne possède aucune solution,
3. si $\beta \notin \{ 2; -3 \}$ alors (S) possède une solution unique.

Exercice 2.13 *CC novembre 2013*

Trouver les valeurs de $\kappa \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système suivant a un nombre respectivement fini et infini de solutions :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \kappa, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - \kappa x_2 + \kappa x_3 = \kappa. \end{cases}$$

Correction.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \kappa \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -\kappa & \kappa & \kappa \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1/2]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \kappa \\ 0 & -1/2 & -1 & -\kappa/2 \\ 0 & -\kappa+1/2 & \kappa & \kappa/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (1-2\kappa)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & \kappa \\ 0 & -1/2 & -1 & -\kappa/2 \\ 0 & 0 & 3\kappa-1 & \kappa^2 \end{array}\right).$$

On conclut que

1. si $\kappa = \frac{1}{3}$ alors (S) ne possède aucune solution,
2. si $\kappa \neq \frac{1}{3}$ alors (S) possède une solution unique donnée par $x_3 = \frac{\kappa^2}{3\kappa-1}$, $x_2 = \frac{-\kappa/2+x_3}{-1/2} = \frac{\kappa(\kappa-1)}{3\kappa-1}$ et $x_1 = \frac{\kappa+x_2}{2} = \frac{\kappa(2\kappa-1)}{3\kappa-1}$,
3. il n'existe aucune valeur de κ pour que (S) possède une infinité de solutions.

Exercice 2.14 *CC octobre 2013*

Résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ x - y + 2z = 7, \\ 3x + az = 10. \end{cases}$$

Correction. Si on utilise la méthode de Gauss on trouve

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\1&-1&2&7\\3&0&a&10\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-3&-1&5\\0&-6&a-9&4\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&-3&-1&5\\0&0&a-7&-6\end{array}\right).$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases}x+2y+3z=2,\\-3y-z=5,\\(a-7)z=-6.\end{cases}$$

Par conséquent,

▷ si $a\neq 7$, $z=\dfrac{-6}{a-7}$, $y=\dfrac{5+z}{-3}=\dfrac{5a-41}{-3(a-7)}$ et $x=2-2y-3z=\dfrac{2(8a-35)}{3(a-7)}$ est l'unique solution du système linéaire ;

▷ si $a=7$ il n'y a pas de solutions du système linéaire.

Observons que si on ne veut pas calculer la solution mais juste dire s'il en existe une (ou plusieurs), il suffit de regarder le rang des matrices $\mathbb{A}$ et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$:

▷ $\operatorname{rg}(\mathbb{A})=\begin{cases}3 & \text{si } a\neq 7\\ 2 & \text{si } a=7\end{cases}$ car $\det(\mathbb{A})=21-3a$ et $\det(\mathbb{A}_{33})\neq 0$ où $\mathbb{A}_{33}$ est la sous-matrice de $\mathbb{A}$ obtenue en supprimant la 3-ème ligne et la 3-ème colonne ;

▷ $\operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}])=3$ car $\det\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&7\\3&0&10\end{pmatrix}\neq 0$ où $\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&7\\3&0&10\end{pmatrix}$ est la sous-matrice de $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$ obtenue en supprimant la 3-ème colonne.

Exercice 2.15 *CC octobre 2013*

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}x-y+2z=7,\\x+2y+3z=2,\\3x+az=10.\end{cases}$$

Correction.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&7\\1&2&3&2\\3&0&a&10\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&7\\0&3&1&-5\\0&3&a-6&-11\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&7\\0&3&1&-5\\0&0&a-7&-6\end{array}\right).$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases}x-y+2z=7,\\3y+z=-5,\\(a-7)z=-6.\end{cases}$$

Par conséquent,

▷ si $a\neq 7$, $z=\dfrac{-6}{a-7}$, $y=\dfrac{-5-z}{3}=\dfrac{-5a+41}{3(a-7)}$ et $x=7-y-2z=\dfrac{2(8a-35)}{3(a-7)}$ est l'unique solution du système linéaire ;

▷ si $a=7$ il n'y a pas de solutions du système linéaire.

Observons que si on ne veut pas calculer la solution mais juste dire s'il en existe une (ou plusieurs), il suffit de regarder le rang des matrices $\mathbb{A}$ et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$:

▷ $\operatorname{rg}(\mathbb{A})=\begin{cases}3 & \text{si } a\neq 7\\ 2 & \text{si } a=7\end{cases}$ car $\det(\mathbb{A})=3a-21$ et $\det(\mathbb{A}_{33})\neq 0$ où $\mathbb{A}_{33}$ est la sous-matrice de $\mathbb{A}$ obtenue en supprimant la 3-ème ligne et la 3-ème colonne ;

▷ $\operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 3$ car $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \neq 0$ où $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ est la sous-matrice de $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]A$ obtenue en supprimant la 3-ème colonne.

Exercice 2.16 *CC Novembre 2012*

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + z + w = 0, \\ ax + y + (a-1)z + w = 0, \\ 2x + ay + z + 2w = 0, \\ x - y + 2z + aw = 0. \end{cases}$$

Correction. Il s'agit d'un système homogène, il est alors inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de Gauss. En appliquant cette méthode on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-a \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - aL_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & a(a-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x + z + w = 0, \\ y - z + (1-a)w = 0, \\ (a-1)z + a(a-1)w = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si on pose $w = \kappa_1 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque, alors

▷ si $a \neq 1$, $z = \frac{-a(a-1)w}{a-1} = -a\kappa_1$, $y = -(1-a)w + z = -\kappa_1$ et $x = -w - z = (a-1)\kappa_1$: tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{\, (a-1, -1, -a, 1) \,\}$ sont solution du système linéaire ;

▷ si $a = 1$, on pose $z = \kappa_2 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque et on a $y = -(1-a)w + z = -(1-a)\kappa_1 + \kappa_2$ et $x = -w - z = -\kappa_1 - \kappa_2$: tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{\, (-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \,\}$ sont solution du système linéaire.

Exercice 2.17 *CC Novembre 2012*

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + z + w = 0, \\ (b+1)x + y + bz + w = 0, \\ 2x + (b+1)y + z + 2w = 0, \\ x - y + 2z + (b+1)w = 0. \end{cases}$$

Correction. Il s'agit d'un système homogène, il est alors inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de Gauss. En appliquant cette méthode on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b & 1 \\ 2 & b+1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - (b+1)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -b \\ 0 & b+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - (b+1)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & b & b(b+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi transformé le système linéaire initial dans le système linéaire triangulaire supérieur équivalent

$$\begin{cases} x + z + w = 0, \\ y - z - bw = 0, \\ bz + b(b+1)w = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si on pose $w = \kappa_1 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque, alors

▷ si $b \neq 0$,
$$z = \frac{-b(b+1)w}{b} = -(b+1)\kappa_1, \qquad y = bw + z = -\kappa_1, \qquad x = -w - z = b\kappa_1;$$
tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{\,(b+1, 1, b+1, -1)\,\}$ sont solution du système linéaire ;

▷ si $b = 0$, on pose $z = \kappa_2 \in \mathbb{R}$ une constante réelle quelconque et on a $y = bw + z = \kappa_2$ et $x = -w - z = -\kappa_1 - \kappa_2$: tous les vecteurs de $\operatorname{Vect}\{\,(-1,1,1,0), (-1,0,0,1)\,\}$ sont solution du système linéaire.

Exercice 2.18

Discuter et résoudre le système
$$(S_m) \quad \begin{cases} (4m^2-1)x + (2m-1)^2 y = (2m+1)^2, \\ (2m+1)x + (4m-1)y = 4m^2-1, \end{cases}$$
d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Correction. Puisque le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$:
$$\begin{vmatrix} 4m^2-1 & (2m-1)^2 \\ 2m+1 & 4m-1 \end{vmatrix} = (4m^2-1)(4m-1) - (2m-1)^2(2m+1) = 2m(2m-1)(2m+1).$$
On a
$$\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \begin{cases} 2 & \text{si } m \in \mathbb{R} \setminus \{\,-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\,\}, \\ 1 & \text{si } m \in \{\,-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\,\}. \end{cases}$$
Pour calculer le rang de la matrice augmentée, on remarque que
$$\operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = \begin{cases} 2 & \text{si } m \in \mathbb{R} \setminus \{\,-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\,\}, \\ 1 \text{ ou } 2 & \text{si } m \in \{\,-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\,\}. \end{cases}$$
Par conséquent :

▷ si $m \in \mathbb{R} \setminus \{\,-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\,\}$, on a $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$ et on a deux inconnues donc le système est de Cramer (*i.e.* il admet une et une seule solution),

▷ si $m \in \{\,-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\,\}$ il faut étudier chaque cas séparément sachant que
  - ▷ si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = \operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 1$, comme on a deux inconnues alors il y a une infinité de solution,
  - ▷ si $\operatorname{rg}(\mathbb{A}) = 1$ et $\operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = 2$, alors le système n'as pas de solutions.

Étudions donc chaque cas :

▷ *Étude du cas* $m = -\frac{1}{2}$. Le système s'écrit
$$(S_{-1/2}) \quad \begin{cases} 4y = 0, \\ -3y = 0, \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{cases}$$

▷ *Étude du cas* $m = 0$. Le système s'écrit
$$(S_0) \quad \begin{cases} -x + y = 1, \\ x - y = -1, \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} y \in \mathbb{R}, \\ x = -1 + y. \end{cases}$$

▷ *Étude du cas* $m = \frac{1}{2}$. Le système s'écrit
$$(S_{1/2}) \quad \begin{cases} 0 = 4, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$$
qui n'admet pas de solutions.

▷ *Étude du cas* $m \in \mathbb{R} \setminus \{\,-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\,\}$. On peut utiliser la méthode de Cramer : l'unique solution est donnée par
$$x = \frac{1}{2m(2m-1)(2m+1)} \begin{vmatrix} (2m+1)^2 & (2m-1)^2 \\ 4m^2-1 & 4m-1 \end{vmatrix} = \frac{-2(2m^2-5m+1}{2m-1},$$
$$y = \frac{1}{2m(2m-1)(2m+1)} \begin{vmatrix} 4m^2-1 & (2m+1)^2 \\ 2m+1 & 4m^2-1 \end{vmatrix} = \frac{(2m+1)(2m-3)}{2m-1}.$$

Donc si on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions,

$$\mathscr{S}=\begin{cases}\{\,(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\,\} & \text{si } m=-1/2,\\ \{\,(-1+y,y)\mid y\in\mathbb{R}\,\} & \text{si } m=0,\\ \emptyset & \text{si } m=1/2,\\ \left\{\,\left(\frac{-2(2m^2-5m+1}{2m-1},\frac{(2m+1)(2m-3)}{2m-1}\right)\,\right\} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 2.19

Discuter et résoudre le système

$$(S_a)\qquad\begin{cases}(1+a)x+y+z=0,\\ x+(1+a)y+z=0,\\ x+y+(1+a)z=0,\end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et de paramètre $a\in\mathbb{R}$.

Correction. Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}=(1+a)^3+1+1-(1+a)-(1+a)-(1+a)=(1+a)^3-3(1+a)+2$$
$$=\Big((1+a)-1\Big)\Big((1+a)^2+(1+a)-2\Big)=\Big((1+a)-1\Big)\Big((1+a)+2\Big)\Big((1+a)-1\Big)=a^2(3+a).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_a)\text{ est de Cramer si et seulement } a\in\mathbb{R}\setminus\{\,-3,0\,\}.$$

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

▷ *Étude du cas $a=-3$.* Le système s'écrit

$$(S_{-3})\qquad\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ x-2y+z=0,\\ x+y-2z=0,\end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases}-2x\quad y\ +z=0\\ x-2y\ +z=0\\ x\quad y-2z=0\end{cases}\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1/2]{L_2\leftarrow L_2+L_1/2}\begin{cases}-2x\quad y\ +z=0\\ -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\ \frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=0\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{cases}-2x\ -y\ +z=0\\ -\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\ 0z=0\end{cases}$$

donc $z=\kappa\in\mathbb{R}$, $y=z$ et $x=z$, ainsi

$$\mathcal{S}=\{\,(\kappa,\kappa,\kappa)\mid\kappa\in\mathbb{R}\,\}.$$

▷ *Étude du cas $a=0$.* Le système s'écrit

$$(S_0)\qquad\begin{cases}x+y+z=0,\\ x+y+z=0,\\ x+y+z=0,\end{cases}$$

donc $z=\kappa_1\in\mathbb{R}$, $y=\kappa_2\in\mathbb{R}$ et $x=-\kappa_1-\kappa_2$, ainsi

$$\mathcal{S}=\left\{\,(-\kappa_1-\kappa_2,\kappa_2,\kappa_1)\;\middle|\;(\kappa_1,\kappa_2)\in\mathbb{R}^2\,\right\}.$$

▷ *Étude du cas $a\in\mathbb{R}\setminus\{\,-3,0\,\}$.* Il s'agit d'un système de Cramer homogène, donc l'unique solution est $(0,0,0)$:

$$\mathscr{S}=\{\,(0,0,0)\,\}.$$

Exercice 2.20

Discuter et résoudre le système

$$(S_a) \quad \begin{cases} x + ay + (a-1)z = 0, \\ 3x + 2y + az = 3, \\ (a-1)x + ay + (a+1)z = a, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Correction. Comme le système contient un paramètre, on commence par calculer le déterminant de la matrice associée :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3 & 2 & a \\ a-1 & a & a+1 \end{vmatrix} = 2(a+1) + a^2(a-1) + 3a(a-1) - 2(a-1)^2 - a^2 - 3a(a+1) = a^2(a-4).$$

Le système est de Cramer si et seulement si ce déterminant est non nul, donc

$$(S_a) \text{ est de Cramer si et seulement } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}.$$

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.

▷ *Étude du cas $a = 0$.* Le système s'écrit

$$(S_0) \quad \begin{cases} x - z = 0, \\ 3x + 2y = 3, \\ -x + z = 0, \end{cases}$$

donc $z = \kappa \in \mathbb{R}$, $y = \frac{3-3\kappa}{2}$ et $x = \kappa$, ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\kappa, \frac{3-3\kappa}{2}, \kappa \right) \middle| \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

▷ *Étude du cas $a = 4$.* Le système s'écrit

$$(S_4) \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + 4z = 3, \\ 3x + 4y + 5z = 4, \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+4y+3z=0, \\ 3x+2y+4z=3, \\ 3x+4y+5z=4, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x+4y+3z=0, \\ -10y-5z=3, \\ -8y-4z=4, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 10L_3 - 8L_2} \begin{cases} x+4y+3z=0, \\ -10y-5z=3, \\ 0=16. \end{cases}$$

La dernière équation est impossible donc

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

▷ *Étude du cas $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$.* On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+ay+(a-1)z=0, \\ 3x+2y+az=3, \\ (a-1)x+ay+(a+1)z=a, \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x+ay+(a-1)z=0, \\ (2-3a)y+(3-2a)z=3, \\ (2-a)ay+(3-a)az=a, \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{(2-a)a}{(2-3a)} L_2} \begin{cases} x+ay+(a-1)z=0, \\ (2-3a)y+(3-2a)z=3, \\ -\frac{a^2(a-4)}{3a-2} z = \frac{4a}{3a-2}. \end{cases}$$

On obtient $z = -\frac{4}{a(a-4)}$, $y = -\frac{a-6}{a(a-4)}$, $x = \frac{a^2-2a-4}{a(a-4)}$, ainsi

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{a^2-2a-4}{a(a-4)}, -\frac{a-6}{a(a-4)}, -\frac{4}{a(a-4)} \right) \right\}.$$

Exercice 2.21

Vrai ou faux ?

① Un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues dont les secondes membres sont nuls n'a que la solution nulle.

② Un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues dont les secondes membres sont nuls a des solutions non nulles.

Correction.

① Faux. Contrexemple : un système linéaire où toutes les équations sont identiques.

② Vrai : $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) \le 3$, $\mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) \le 3$; comme les secondes membres sont nuls alors $\mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{b}]) = \mathrm{rg}(\mathbb{A})$ donc il admet forcement des solutions ; comme il y a 4 inconnues, alors on a une infinité de solutions.

Exercice 2.22

Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Correction. (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ -3y + 3z = 0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme (κ, κ, κ) pour $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.23

Trouver toutes les solutions du système linéaire homogène

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Correction. Le système étant homogène, il est inutile d'écrire le terme source dans la méthode du pivot de Gauss :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}\kappa, -\frac{3}{2}\kappa, 0, \kappa)$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.24

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 = b. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de b le système est-il possible ?
2. Donner à b la valeur trouvée au point précédent et calculer la solution complète du système.

Correction. (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+4x_4=6, \\ 0=b+18. \end{cases}$$

1. (S) est possible si et seulement si $b=-18$.
2. Si $b=-18$, (S) admet ∞^3 solutions de la forme $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(6-a+2b-4c,a,b,c)$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.25

Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6, \\ -x-y+2z=0, \\ 3x+2y-4z=1, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Correction. (S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S')\quad \begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6, \\ -x-y+2z=0, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=6, \\ -x-y+2z=0, \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{cases} x+y+z=3, \\ y+2z=3, \\ 3z=3, \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(1,1,1)$. On étudie alors si elle est aussi solution de l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1,1,1)$ on a $3x+2y-4z=1$ donc le triplet $(1,1,1)$ est solution de (S) et c'est l'unique.

Exercice 2.26

Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \\ x+y+z=4. \end{cases}$$

Correction. (S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S')\quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ -3y-3z=3, \\ 3y+3z=-3, \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_2} \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ -3y-3z=3, \\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(1+\kappa,-1-\kappa,\kappa)$ on a $x+y+z=1+\kappa-1-\kappa+\kappa=\kappa$ donc $x+y+z=4$ si et seulement si $\kappa=4$ ainsi (S) admet l'unique solution $(5,-5,4)$.

Exercice 2.27 *CT Septembre 2009*

Déterminer si le système suivant a une solution non nulle. Dans le cas affirmatif trouver la(les) solution(s) et expliquer pourquoi :

$$(S)\qquad \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0,\\ 3x-11y+12z=0. \end{cases}$$

Correction. (S) étant un système de 4 équations à 3 inconnues, on considère le sous-système carré d'ordre 3

$$(S')\qquad \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0, \end{cases}$$

qu'on peut résoudre par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 2x+y-2z=0,\\ 3x+4y-6z=0, \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 5y-6z=0,\\ 10y-12z=0, \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} x-2y+2z=0,\\ 5y-6z=0,\\ 0=0, \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$. Cherchons parmi ces solutions celles qui vérifient l'équation de (S) qui n'apparaît pas dans (S') : pour $(x,y,z)=(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ on a $3x-11y+12z=6\kappa-66\kappa+60\kappa=0$ donc $3x-11y+12z=0$ pour tout $\kappa\in\mathbb{R}$ ainsi (S) admet une infinité de solutions de la forme $(2\kappa,6\kappa,5\kappa)$ pour $\kappa\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.28 *CC Octobre 2011*

Calculer $\mathbb{A}^{-1}$ où $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 4 & -1 & -2\\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction.

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_3]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1\\ L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ L_3\leftarrow L_3+2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1\\ L_2\leftarrow -L_2\\ L_3\leftarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3\\ L_2\leftarrow L_2-2L_3\\ L_3\leftarrow -L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)=[\mathbb{I}_3|\mathbb{A}^{-1}].$$

Exercice 2.29 *CC Octobre 2011*

Calculer $\mathbb{A}^{-1}$ où $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction.

$$
[\mathbb{A}|\mathbb{I}_3]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_1]{\substack{L_1\leftarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3]{\substack{L_1\leftarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow -L_3]{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_3\\L_2\leftarrow L_2+2L_3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&-4&1&2\\0&0&1&2&0&-1\end{array}\right)=[\mathbb{I}_3|\mathbb{A}^{-1}].
$$

Exercice 2.30

Calculer les inverses des matrices suivantes (si elles existent) :

$$
\mathbb{A}=\begin{pmatrix}2&-3\\4&5\end{pmatrix},\qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&5&-3\\2&11&1\\2&9&-11\end{pmatrix},\qquad \mathbb{C}=\begin{pmatrix}1&5&-3\\2&11&1\\1&4&-10\end{pmatrix}.
$$

Correction.

$\det(\mathbb{A})=22\neq 0$ donc $\mathbb{A}$ est inversible et on trouve

$$
\mathbb{A}^{-1}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}5&3\\-4&2\end{pmatrix}.
$$

$\det(\mathbb{B})=2\neq 0$ donc $\mathbb{B}$ est inversible et on trouve

$$
\mathbb{B}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-130&28&38\\24&-5&-7\\-4&1&1\end{pmatrix}.
$$

$\det(\mathbb{C})=0$ donc $\mathbb{C}$ n'est pas inversible.

Exercice 2.31 *CC octobre 2013*

Soit $\mathbb{A}$ la matrice

$$
\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&-1&-1\\1&2&-1&-2\\1&2&0&-2\end{pmatrix}.
$$

1. Calculer $\det(\mathbb{A})$.
2. Si $\det(\mathbb{A})\neq 0$, calculer $\mathbb{A}^{-1}$.

Correction.

1. Pour calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$ on développe par rapport à la première ligne

$$
\det(\mathbb{A})=1\cdot\det(\mathbb{A}_{11})-0\cdot\det(\mathbb{A}_{12})+0\cdot\det(\mathbb{A}_{13})-(-1)\cdot\det(\mathbb{A}_{14})=\det\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-2\\2&0&-2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\1&2&0\end{pmatrix}.
$$

On note que la première colonne de la sous-matrice $\mathbb{A}_{11}$ est l'opposée de la deuxième colonne, ainsi le déterminant de $\mathbb{A}_{11}$ est nul et il ne reste plus qu'à calculer le déterminant de $\mathbb{A}_{14}$ (par exemple en utilisant la règle de Sarrus).

$$
\det(\mathbb{A})=0+\det\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\1&2&0\end{pmatrix}=1.
$$

2. Calculons $\mathbb{A}^{-1}$ avec l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode de Gauss

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_4]=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&1&0&0&0\\1&1&-1&-1&0&1&0&0\\1&2&-1&-2&0&0&1&0\\1&2&0&-2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4-L_1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&-1&1&0&0\\0&2&-1&-1&-1&0&1&0\\0&2&0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_2\\L_4\leftarrow L_4-2L_2}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&1&0&0&0\\0&1&-1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&-1&1&-2&1&0\\0&0&2&-1&1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1\\L_2\leftarrow L_2+L_3\\L_4\leftarrow L_4-2L_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&1&0&0&0\\0&1&0&-1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&-2&1&0\\0&0&0&1&-1&2&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_4\\L_2\leftarrow L_2+L_4\\L_3\leftarrow L_3+L_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&2&-2&1\\0&1&0&0&-1&1&-1&1\\0&0&1&0&0&0&-1&1\\0&0&0&1&-1&2&-2&1\end{array}\right)=[\mathbb{I}_4|\mathbb{A}^{-1}].$$

Méthode de Cramer

▷ On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice}=\begin{pmatrix}
+\begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-2\\2&0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&-1&-2\\1&0&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\1&2&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\1&2&0\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}0&0&-1\\2&-1&-2\\2&0&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-1&-2\\1&0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&2&-2\\1&2&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\1&2&0\end{vmatrix}\\
+\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&-1&-1\\2&0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\1&0&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\1&2&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&2&0\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&-1&-1\\2&-1&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\1&-1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\1&2&-2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&2&-1\end{vmatrix}
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&-1\\2&1&0&2\\-2&-1&-1&-2\\1&1&1&1\end{pmatrix};$$

▷ on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice}^T=\begin{pmatrix}0&2&-2&1\\-1&1&-1&1\\0&0&-1&1\\-1&2&-2&1\end{pmatrix};$$

▷ on divise par $\det(\mathbb{A})$ et on obtient

$$\mathbb{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-2&1\\-1&1&-1&1\\0&0&-1&1\\-1&2&-2&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.32 *CC octobre 2013*

Soit $\mathbb{A}$ la matrice

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&2\\0&-1&-1&0\\-1&-1&-2&-2\end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(\mathbb{A})$.
2. Si $\det(\mathbb{A})\neq 0$, calculer $\mathbb{A}^{-1}$.

Correction.

1. Pour calculer le déterminant de la matrice $\mathbb{A}$ on développe par rapport à la première colonne

$$\det(\mathbb{A}) = 1\cdot\det(\mathbb{A}_{11}) - 0\cdot\det(\mathbb{A}_{21}) + 0\cdot\det(\mathbb{A}_{31}) - (-1)\cdot\det(\mathbb{A}_{41}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

   On note que la première ligne de la sous-matrice $\mathbb{A}_{11}$ est l'opposée de la deuxième ligne, ainsi le déterminant de $\mathbb{A}_{11}$ est nul et il ne reste plus qu'à calculer le déterminant de $\mathbb{A}_{41}$ (par exemple en utilisant la règle de Sarrus).

$$\det(\mathbb{A}) = 0 + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix} = 1.$$

2. Calculons $\mathbb{A}^{-1}$ avec l'une des deux méthodes suivantes :

   <u>Méthode de Gauss</u>

$$[\mathbb{A}|\mathbb{I}_4] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4+L_1]{\substack{L_2\leftarrow L_2\\ L_3\leftarrow L_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4]{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2\\ L_3\leftarrow L_3+L_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4+L_3]{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_3\\ L_2\leftarrow L_2-2L_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-2L_4]{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_4\\ L_2\leftarrow L_2+2L_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) = [\mathbb{I}_4|\mathbb{A}^{-1}].$$

   <u>Méthode de Cramer</u>

   ▷ On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}\\[2ex] -\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}\\[2ex] +\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}\\[2ex] -\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix};$$

   ▷ on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

   ▷ on divise par $\det(\mathbb{A})$ et on obtient

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, Sous-espaces vectoriels

Définition *Espace vectoriel*

Un ESPACE VECTORIEL sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E contenant au moins un élément, noté $\mathbf{0}_E$, ou simplement $\mathbf{0}$, muni d'une addition

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}\in E \qquad \text{pour tout } \mathbf{u}, \mathbf{v}\in E$$

et d'une multiplication par les scalaires

$$\alpha\cdot\mathbf{u}\in E \qquad \text{pour tout } \mathbf{u}\in E \text{ et pour tout } \alpha\in\mathbb{K}$$

avec les propriétés suivantes : pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in E$ et pour tout α, $\beta\in\mathbb{K}$,

① $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (associativité)

② $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (commutativité)

③ $\mathbf{u}+\mathbf{0}_E=\mathbf{0}_E+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ (existence d'un élément neutre pour l'addition)

④ $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}_E$ en notant $-\mathbf{u}=(-1_{\mathbb{K}})\cdot\mathbf{u}$ (existence d'un élément opposé)

⑤ $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{u}=\alpha\cdot\mathbf{u}+\beta\cdot\mathbf{u}$ (compatibilité avec la somme des scalaires)

⑥ $\alpha\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\cdot\mathbf{u}+\alpha\cdot\mathbf{v}$ (compatibilité avec la somme des vecteurs)

⑦ $\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{u})=(\alpha\beta)\cdot\mathbf{u}$ (compatibilité avec le produit des scalaires)

⑧ $1_{\mathbb{K}}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ (compatibilité avec l'unité)

Les éléments de E sont appelés VECTEURS, l'élément neutre de l'addition $\mathbf{0}_E$ est appelé VECTEUR NUL, le symétrique d'un vecteur $\mathbf{u}$ pour l'addition est appelé VECTEUR OPPOSÉ DE $\mathbf{u}$ et est noté $-\mathbf{u}$.

Nous travaillerons avec $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

Exemple

L'ensemble $\mathbb{R}^2=\{\,(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\,\}$ est un espace vectoriel pour les opérations

▷ somme : $(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w)$

▷ multiplication : $\alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$.

Définition *Sous-espace vectoriel*

Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un SOUS-ESPACE VECTORIEL de E si et seulement si F est un espace vectoriel et $F\subset E$.

Exemple

- ▷ L'ensemble $\{ \mathbf{0}_E \}$ constitué de l'unique élément nul est un sous-espace vectoriel de E, à ne pas confondre avec l'ensemble vide $\emptyset$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de E (il ne contient pas le vecteur nul).
- ▷ L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de E.

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E on utilise le théorème suivant.

Théorème

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$
2. $\mathbf{0}_E \in F$
3. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F \implies \mathbf{u}+\mathbf{v} \in F$
4. $\mathbf{u} \in F, \alpha \in \mathbb{K} \implies \alpha \cdot \mathbf{u} \in F$

Exemple

L'ensemble

$$F = \{ \mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \mathbb{O}_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a+d=0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet :

1. $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
2. $\mathbf{0}_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ car $0+0=0$;
3. si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ appartiennent à F (c'est-à-dire $a+d=0$ et $e+h=0$), alors $M+N = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ appartient à F car $(a+e)+(d+h) = (a+d)+(e+h) = 0+0 = 0$;
4. si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à F (c'est-à-dire $a+d=0$) et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \cdot M = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ appartient à F car $\alpha a + \alpha d = \alpha(a+d) = 0$.

Exemple

L'ensemble

$$F = \{ \mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(\mathbb{A}) = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, ad = bc \right\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de l'ensemble $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet la somme de deux éléments de F peut ne pas appartenir à F, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

On note $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles suivants de $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

① $F = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est paire} \}$;
② $F = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire} \}$;
③ $F = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x) + 2 \}$;
④ $F = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0 \}$;
⑤ $F = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$;
⑥ $F = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \}$;
⑦ $F = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \}$.

On cherche lesquels forment des sous-espaces vectoriels :

① F est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car
1. $x \mapsto 0 \in F$,
2. $f, g \in F \implies f+g \in F$ car $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$,
3. $f \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha \cdot f)(x)$;

② F est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car
1. $x \mapsto 0 \in F$,
2. $f, g \in F \implies f+g \in F$ car $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f+g)(x)$,

3. $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha f(-x) = -\alpha f(x) = -(\alpha \cdot f)(x)$;

③ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il ne contient pas la fonction nulle $x \mapsto 0$;

④ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car l'opposé de la fonction $f: x \mapsto 1$, qui est un élément de F, est la fonction $f: x \mapsto -1$, qui n'est pas un élément de F ;

⑤ F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

1. $x \mapsto 0 \in F$,
2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \equiv 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
3. $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \equiv 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

⑥ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il ne contient pas la fonction nulle $x \mapsto 0$;

⑦ $F = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \}$; F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

1. $x \mapsto 0 \in F$,
2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0$,
3. $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(1) = \alpha f(1) = 0$.

Exemple

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}_n[x]$

① $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid \deg(p) = 7 \}$;

② $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid \deg(p) \leq 3 \}$;

③ $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p \text{ est pair} \}$;

④ $F = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(1) = p(2) = p(3) = 0 \}$.

On cherche lesquels forment des sous-espaces vectoriels :

① F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car il ne contient pas le polynôme nul (le polynôme nul n'est pas de degré 7).

② F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car

1. $p(x) = 0 \in F$ car $\deg(0) \leq 3$,
2. $p, q \in F \implies p + q \in F$ car $\deg(p+q) = \deg(p) + \deg(q) \leq 3$,
3. $p \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot p \in F$ car $\deg(\alpha \cdot p)(1) = \deg(p) \leq 3$;

③ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car F c'est l'intersection des deux espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ et $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ est paire}\}$ de l'exemple précédent ; (on verra un théorème plus tard)

④ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ car

1. $p(x) = 0 \in F$,
2. $p, q \in F \implies p + q \in F$ car $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ pour $x = 1, 2, 3$,
3. $p \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot p \in F$ car $(\alpha \cdot p)(x) = \alpha p(x) = 0$ pour $x = 1, 2, 3$.

Combinaisons linéaires, espace engendré

Définition *Combinaison linéaire*

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$. Le vecteur

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i$$

est appelé COMBINAISON LINÉAIRE des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$.

Exemple

Considérons les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.
Pour prouver qu'un vecteur $\mathbf{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ il faut montrer qu'il existe p constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ telles que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_p \mathbf{u}_p.$$

On cherche alors a et b réels tels que
$$\mathbf{u}_3 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2,$$
ce qui donne
$$\begin{cases} -1 = -a, \\ 0 = -2a + 2b, \\ -4 = -3a - b, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b = 1.$$
Par conséquent $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ car $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Définition *Espace engendré*

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces p vecteurs fixés est un sous-espace vectoriel de E appelé SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ par $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ et noté $\operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$:
$$\operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\} = \left\{ \mathbf{u} \in E \;\middle|\; \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i \right\}.$$

Notons que les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ *appartiennent à* $\operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ *car pour tout* $j = 1, 2, \dots, p$
$$\mathbf{u}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p} 0 \cdot \mathbf{u}_i + 1 \cdot u_j.$$
Bien sûr le vecteur $\mathbf{0}_E$ *appartient à* $\operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ *car*
$$\mathbf{0}_E = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot \mathbf{u}_i.$$

Exemple

- ▷ $\operatorname{Vect}\{ \mathbf{0}_E \} = \{ \mathbf{0}_E \}$
- ▷ $\operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

Familles libres, génératrices, bases

Définition *Famille libre, famille génératrice, base*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est…

… GÉNÉRATRICE DE E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de F :
$$\text{pour tout } \mathbf{u} \in E \text{ il existe } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i;$$

… LIBRE si et seulement si le vecteur nul $\mathbf{0}_E$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ de façon unique :
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_i = 0 \ \forall i$$

… BASE DE E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de F de façon unique :
$$\text{pour tout } \mathbf{u} \in E \text{ il existe unique } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i;$$

Dans ce cas, les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont appelées COORDONNÉES du vecteur $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{F}$, on écrit $\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{F}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et on dit que E est de DIMENSION p FINIE.

Exemple

La famille $\{\, \mathbf{u} = (1,0), \mathbf{v} = (0,1), \mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v} \,\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ n'est pas libre : par exemple le vecteur $(2,-1)$ peut s'écrire comme $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$, comme $2\mathbf{w}-3\mathbf{v}$ etc.

Exemple

Considérons les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\2 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer qu'ils sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, il faut montrer que le vecteur $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$ ne peut s'écrire que d'une seule façon comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$. Supposons que

$$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3,$$

cela correspond au système linéaire

$$\begin{cases} 0 = 3a,\\ 0 = a,\\ 0 = 2a-b,\\ 0 = b+2c \end{cases} \qquad \text{dont l'unique solution est} \quad a=b=c=0.$$

Par conséquent la famille $\{\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \,\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

Théorème

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre, noté $\dim(E)$, est appelé la DIMENSION de E.

Attention *Dimension $\neq$ cardinal*

Attention à ne pas confondre DIMENSION et CARDINAL : dans un espace vectoriel de dimension n, toutes les bases ont le même cardinal (*i.e.* même nombre d'éléments), mais il ne faut pas parler de cardinal d'un espace vectoriel, ni de dimension d'une base.

Théorème

Dans un espace vectoriel E de dimension n, une FAMILLE GÉNÉRATRICE a au moins n éléments.
Si elle a plus de n éléments, alors elle n'est pas libre mais on peut en extraire une sous-famille libre de cardinal n qui est alors une base de E.
Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E.

Théorème *de la base incomplète*

Dans un espace vectoriel E de dimension n, une FAMILLE LIBRE a au plus n éléments.
Si elle a moins de n éléments, alors elle n'est pas une base de E mais on peut la compléter de façon à obtenir une base.
Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E.

Théorème *de la dimension*

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

❶ $\mathcal{F}$ est une base de E

❷ $\mathcal{F}$ est libre et contient n éléments

❸ $\mathcal{F}$ est génératrice de E et de contient n éléments

❹ $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E

Attention

On utilise ce théorème principalement pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E. On utilisera surtout les implications suivantes (avec E de dimension n) :
▷ si $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n alors $\mathcal{F}$ est une base de E
▷ si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E alors $\mathcal{F}$ est une base de E

Exemple *Base canonique de $\mathbb{R}^n$*

Avec $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. La famille $\mathcal{B} = \{ (1,0,\dots,0); (0,1,\dots,0); \dots; (0,0,\dots,1) \}$ est une base, appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}^n$, car pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 \cdot (1,0,\dots,0) + u_2 \cdot (0,1,\dots,0) + \dots + u_n \cdot (0,0,\dots,1)$ de façon unique.

Exemple

On a déjà vu que $\mathcal{A} = \{ (1,0), (0,1) \}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que par conséquent $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Soit $\mathcal{B} = \{ (2,-1), (1,2) \}$. Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ on va prouver qu'elle est une famille libre de cardinal 2 :
▷ $\mathcal{B}$ est une famille libre car

$$\alpha_1 \cdot (2,-1) + \alpha_2 \cdot (1,2) = (0,0) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

▷ cardinal$(\mathcal{B}) = 2$.

Exemple *Base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$*

Avec $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré $\le n$ est de dimension $n+1$. La base $\mathcal{C} = \{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ est appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}_n[x]$ car, pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ de façon unique.

Exemple *Base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$*

Avec $n, m \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices $n \times m$ est un espace vectoriel de dimension nm. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ est un espace vectoriel de dimension n^2. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Définition *Vecteurs linéairement indépendants*

Quand une famille est libre, on dit que les vecteurs qui la composent sont LINÉAIREMENT INDÉPENDANTS.
Une FAMILLE LIÉE est une famille non libre.

Exemple

Soit E un espace vectoriel et $\mathbf{u} \in E$.
▷ $\{ \mathbf{u} \}$ est une famille libre si et seulement si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_E$.
▷ L'espace vectoriel $\{ \mathbf{0}_E \}$ n'a pas de base, il est de dimension 0.
▷ Soit E un espace vectoriel de dimension n. Le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 0 est $\{ \mathbf{0}_E \}$, le seul sous-espace vectoriel de E de dimension n est E.

Définition *Vecteurs colinéaires*

Soit E un espace vectoriel. Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E sont dits colinéaires si et seulement si $\mathbf{v} = \mathbf{0}_E$ ou $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\{ \mathbf{u}, \mathbf{v} \}$ est une famille libre si et seulement si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple

Soient $\mathbf{u} = (2,-1,3)$, $\mathbf{v} = (-4,2,-6)$ et $\mathbf{w} = (-4,2,6)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
▷ $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires car $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$: la famille $\{ \mathbf{u}, \mathbf{v} \}$ n'est donc pas libre ;
▷ $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas colinéaires : la famille $\{ \mathbf{u}, \mathbf{w} \}$ est libre ;
▷ $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas colinéaires : la famille $\{ \mathbf{v}, \mathbf{w} \}$ est libre.

Théorème

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. Si deux vecteurs de $\mathcal{F}$ sont colinéaires alors la famille est liée. La réciproque est fausse.

Exemple

- Soit $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\}$ avec $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$ et $\mathbf{w} = (-1, 0, 1)$. La famille est liée car $\mathbf{w} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.
- Soit $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\}$ avec $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$ et $\mathbf{w} = (3, 0, 1)$. La famille est liée car $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Cependant les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas à deux à deux colinéaires.

Attention

Pour montrer qu'une famille de plus de deux vecteurs est libre, on sera amené à résoudre le système linéaire correspondant, qui est un système homogène : la famille est libre si et seulement si le système admet uniquement la solution nulle.

Définition *Rang d'une famille de vecteurs*

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \,\}$ une famille d'éléments de E. On appelle RANG DE $\mathcal{F}$, et on note $\operatorname{rg}(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$:

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{Vect}\{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \,\}).$$

Attention

Le rang d'une matrice $\mathbb{A}$ est le rang des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Donc

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]),$$

où $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

Interpolation polynomiale : base canonique, base de Lagrange, base de Newton

Supposons que l'on veuille chercher un polynôme P_n de degré $n \ge 0$ qui, pour des valeurs $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ distinctes données (appelés nœuds d'interpolation), prenne les valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ respectivement, c'est-à-dire

$$P_n(x_i) = y_i \qquad \text{pour } 0 \le i \le n. \tag{3.1}$$

Si un tel polynôme existe, il est appelé *polynôme d'interpolation* ou *polynôme interpolant*.

Base canonique. Une manière apparemment simple de résoudre ce problème est d'écrire le polynôme dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des coefficients qui devront être déterminés. Les $(n+1)$ relations (3.1) s'écrivent alors

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_n + a_1 x_n + \dots a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Puisque les valeurs x_i et y_i sont connues, ces relations forment un système linéaire de $(n+1)$ équations en les $(n+1)$ inconnues $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ qu'on peut mettre sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Ainsi, le problème consistant à chercher le polynôme P_m satisfaisant (3.1) peut se réduire à résoudre le système linéaire (3.2).

Base de Lagrange. Malheureusement, résoudre une système linéaire de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues n'est pas une tache triviale. Cette méthode pour trouver le polynôme P_n n'est donc pas une bonne méthode en pratique. On se demande alors s'il existe une autre base $\{ L_0, L_1, L_2, \dots, L_n \}$ de $\mathbb{R}_n[x]$ telle que le polynôme P_n s'écrit

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \dots + y_n L_n(x),$$

autrement dit s'il existe une base telle que les coordonnées du polynôme dans cette base ne sont rien d'autre que les valeurs connues $y_0, y_1, \dots, y_n$. Pour trouver une telle base, commençons par imposer le passage du polynôme par les $n+1$ points donnés : les $(n+1)$ relations (3.1) imposent la condition

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } 0 \le i, j \le n,$$

ce qui donne

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Il est facile de vérifier que

- ▷ $L_i(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ car le numérateur de $L_i(x)$ est un produit de n termes $(x - x_j)$ avec $i \neq j$ et est donc un polynôme de degré n et le dénominateur de $L_i(x)$ est une constante,
- ▷ $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, $0 \le i \le n$,
- ▷ $L_i(x_i) = 1$.

De plus, les polynômes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ sont linéairement indépendants car si l'équation $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) = 0$ doit être satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors en particulier elle doit être satisfaite pour $x = x_j$ pour tout $j = 0, 1, \dots, n$ et puisque $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j$, on conclut que tous les α_j sont nuls. Par conséquent, la famille $\{ L_0, L_1, L_2, \dots, L_n \}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Il est important de remarquer que nous avons construit explicitement une solution du problème (3.1) et ceci pour n'importe quelles valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ données. Ceci montre que le système linéaire (3.2) a toujours une unique solution.

Étant donné $n+1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$ et $n+1$ valeurs correspondantes $y_0, \dots, y_n$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P_n(x_i) = y_i$, pour $i = 0, \dots n$ qu'on peut écrire sous la forme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \qquad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Cette relation est appelée formule d'interpolation de Lagrange et les polynômes L_i sont les polynômes caractéristiques (de Lagrange).

Base de Newton. Cependant, cette méthode n'est pas encore la plus efficace d'un point de vue pratique. En effet, pour calculer le polynôme d'interpolation d'un ensemble de $n+1$ points on doit calculer les $n+1$ polynômes $\{ L_0, L_1, L_2, \dots, L_n \}$. Si ensuite on ajoute un point d'interpolation, on doit calculer les $n+2$ polynômes $\left\{ \tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_{n+1} \right\}$ qui diffèrent tous des $n+1$ calculés précédemment. La méthode de Newton est basée sur le choix d'une autre base de sort à ce que l'ajout d'un point comporte juste l'ajout d'une fonction de base.

Considérons la famille de polynômes $\{ \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ où

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= 1, \\ \omega_k(x) &= \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_{k-1})\omega_{k-1}(x), \qquad \forall k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

- ▷ $\omega_k(x) \in \mathbb{R}_n[x]$,
- ▷ la famille $\{ \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$
- ▷ la famille $\{ \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ est libre.

Par conséquent, la famille $\{ \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Si on choisit comme base de $\mathbb{R}_n[x]$ la famille $\{\,\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\,\}$, le problème du calcul du polynôme d'interpolation p_n est alors ramené au calcul des coefficients $\{\,\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\,\}$ tels que

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x).$$

Si on a calculé les $n+1$ coefficients $\{\,\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\,\}$ et on ajoute un point d'interpolation, il n'y a plus a calculer que le coefficient α_{n+1} car la nouvelle base est déduite de l'autre base en ajoutant simplement le polynôme ω_{n+1}.

Commençons par chercher une formule qui permet de calculer ces coefficients. Le polynôme d'interpolation dans la base de Newton évalué en x_0 donne

$$p_n(x_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x_0) = \alpha_0$$

donc $\alpha_0 = y_0$. Le polynôme d'interpolation dans la base de Newton évalué en x_1 donne

$$p_n(x_1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0)$$

donc $\alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Le polynôme d'interpolation dans la base de Newton évalué en x_2 donne

$$p_n(x_2) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

donc

$$\alpha_2 = \frac{y_2 - \alpha_0 - \alpha_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Pour calculer tous les coefficients on va alors introduire la notion de *différence divisée* : soit $\{\,(x_i, y_i)\,\}_{i=0}^{n}$ un ensemble de $n+1$ points distincts.

▷ La différence divisée d'ordre 1 de x_{i-1} et x_i est

$$f[x_{i-1}, x_i] \equiv \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

▷ La différence divisée d'ordre n des $n+1$ points $x_0, \dots, x_n$ est définie par récurrence en utilisant deux différences divisées d'ordre $n-1$ comme suit :

$$f[x_0, \dots, x_n] \equiv \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Pour expliciter le processus récursif, les différences divisées peuvent être calculées en les disposant de la manière suivante dans un tableau :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-4}, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$\dots$
0	x_0	$\boxed{y_0}$					
1	x_1	y_1	$\boxed{f[x_0, x_1]}$				
2	x_2	y_2	$f[x_1, x_2]$	$\boxed{f[x_0, x_1, x_2]}$			
3	x_3	y_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$		
4	x_4	y_4	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\boxed{\ddots}$

Soit $\{\,(x_i, y_i)\,\}_{i=0}^{n}$ un ensemble de $n+1$ points distincts. Le polynôme d'interpolation p_n sous la forme de Newton est donné par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i].$$

Comme le montre la définition des différences divisées, des points supplémentaires peuvent être ajoutés pour créer un nouveau polynôme d'interpolation sans recalculer les coefficients. De plus, si un point est modifié, il est inutile de recalculer l'ensemble des coefficients. Autre avantage, si les x_i sont équirépartis, le calcul des différences divisées devient nettement plus rapide. Par conséquent, l'interpolation polynomiale dans une base de NEWTON est privilégiée par rapport à une interpolation dans la base de LAGRANGE pour des raisons pratiques.

Voyons un exemple : on veut calculer le polynôme d'interpolation de de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en les 3 points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, \dots, 2$. On cherche donc $p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $p_2(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 2$.

Méthode directe. Si on écrit $p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} \\ 1 & \pi & \pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{4}{\pi}$ et $\alpha_2 = -\frac{4}{\pi^2}$.

Méthode de Lagrange. On a

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = \frac{x(x-\pi)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)} = -\frac{4}{\pi^2} x(x-\pi).$$

Méthode de Newton. On commence par construire le tableau des différences divisées :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	$\boxed{0}$		
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\boxed{\frac{2}{\pi}}$	
2	π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$

On a alors

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \sum_{i=0}^{2} \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i] \\ &= \omega_0(x) f[x_0] + \omega_1(x) f[x_0, x_1] + \omega_2(x) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= \frac{2}{\pi}\omega_1(x) - \frac{4}{\pi^2}\omega_2(x) \\ &= \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi). \end{aligned}$$

Maintenant on veut calculer le polynôme d'interpolation de la même fonction en les 4 points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, \dots, 3$, *i.e.* on a juste ajouté le point $x = 3\pi/2$. On cherche donc $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que $p_3(x_i) = \sin(x_i)$ pour $i = 0, \dots, 3$.

Méthode directe. Si on écrit $p_3(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, on cherche $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^3}{8} \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 \\ 1 & \frac{3\pi}{2} & \frac{9\pi^2}{4} & \frac{27\pi^3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système linéaire on trouve $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{16}{3\pi}$, $\alpha_2 = -\frac{8}{\pi^2}$ et $\alpha_3 = \frac{8}{3\pi^3}$.

Méthode de Lagrange. On a

$$\begin{aligned} p_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) &= \frac{x(x-\pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)} - \frac{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right)} \\ &= \frac{4}{\pi^3}x(x-\pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{4}{3\pi^3}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x-\pi). \end{aligned}$$

Méthode de Newton. Il suffit de calculer une différence divisée en plus, *i.e.* ajouter une ligne au tableau :

i	x_i	y_i	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	0	$\boxed{0}$			
1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\boxed{\frac{2}{\pi}}$		
2	π	0	$-\frac{2}{\pi}$	$\boxed{-\frac{4}{\pi^2}}$	
3	$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\boxed{\frac{8}{3\pi^3}}$

On a alors

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{i=0}^{3} \omega_i(x) f[x_0,\dots,x_i] \\
&= p_2(x) + \omega_3(x) f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
&= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi) + \frac{8}{3\pi^3}\omega_3(x) \\
&= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi) + \frac{8}{3\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) \\
&= \frac{8}{3\pi^3}x(x^2-3\pi x+2\pi^2).
\end{aligned}$$

Intersection et Somme d'espaces vectoriels

Théorème

L'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.

En revanche, la réunion de deux espaces vectoriels n'en est pas un en général. Le plus petit espace vectoriel contenant F et G est le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$ qui est en général différent de $F \cup G$.

Définition *Somme d'espaces vectoriels*

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. On appelle SOMME de F_1 et F_2 l'ensemble F_1+F_2 des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 :

$$\mathbf{u} \in F_1 + F_2 \qquad \iff \qquad \exists \mathbf{v}_1 \in F_1,\ \mathbf{v}_2 \in F_2,\ \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

La somme de deux sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E.

Proposition *Dimension de la somme (formule de Grassmann)*

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F_1+F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

Définition *Somme directe d'espaces vectoriels*

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. La somme de F_1 et F_2 est DIRECTE, et est notée $F_1 \oplus F_2$, si leur intersection est réduite au vecteur nul :

$$F = F_1 \oplus F_2 \qquad \iff \qquad \begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{\, \mathbf{0}_E \,\} \end{cases}$$

Proposition

La somme de deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 est directe si et seulement si l'écriture de tout vecteur $\mathbf{u} \in F_1 + F_2$ sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ avec $\mathbf{u}_1 \in F_1$ et $\mathbf{u}_2 \in F_2$ est unique.

Définition *Espaces vectoriels supplémentaires*

Soit F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. Ils sont SUPPLÉMENTAIRES si leur somme est directe et égale à l'espace E, autrement dit

$$\forall\ \mathbf{u} \in E, \quad \exists!\ \mathbf{v}_1 \in F_1,\ \exists!\ \mathbf{v}_2 \in F_2, \quad \text{tels que} \qquad \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ les deux sous-espaces vectoriels $F_1 = \operatorname{Vect}\{\,(1,0)\,\}$ et $F_2 = \operatorname{Vect}\{\,(0,1)\,\}$ sont supplémentaires. En effet, tout élément (a,b) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme $a(1,0) + b(0,1)$.

Astuce

Lorsque F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels, pour prouver que $F_1 \cap F_2 = \{\,\mathbf{0}_E\,\}$, il suffit de montrer l'implication $\mathbf{u} \in F_1 \cap F_2 \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}_E$. L'autre inclusion est évidente puisque, $F_1 \cap F_2$ étant un sous-espace vectoriel de F_1, il contient le vecteur nul.

Remarque

En utilisant la proposition sur la dimension de la somme (*i.e.* la formule de GRASSMANN) pour F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires on trouve

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

Théorème

Tout sous-espace vectoriel V de E admet au moins un supplémentaire.

Remarque

En général, un sous-espace vectoriel admet beaucoup de supplémentaires, les seuls cas d'unicité sont les suivants : le seul supplémentaire de l'espace vectoriel $\{\,\mathbf{0}_V\,\}$ dans un espace vectoriel V est V ; le seul supplémentaire de V dans V est $\{\,\mathbf{0}_V\,\}$.

Astuce

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Pour démontrer $E = F \oplus G$, il suffit de prouver que

1. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$,
2. et au choix
   - ▷ soit que $F \cap G = \{\,\mathbf{0}_E\,\}$ car alors on a

     $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

     ce qui prouve que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E et donc égal à E,
   - ▷ soit que $F + G = E$ car alors on a

     $$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(E) = 0$$

     et donc $F \cap G = \{\,\mathbf{0}_F\,\}$.

Matrices et changement de base

Quand on parle d'un vecteur d'un espace vectoriel, on parle d'un objet précis : le vecteur $\mathbf{u}$ de l'espace E. Mais quand on veut faire des calculs avec une base $\mathcal{B}$ de E, on calcule avec les coordonnées du vecteur $\mathbf{u}$ dans cette base $\mathcal{B}$. Si on veut conduire des calculs dans une base $\mathcal{C}$ de E, le vecteur $\mathbf{u}$ n'a pas changé, mais on doit calculer avec les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{C}$. On va établir la relation entre ces coordonnées.

Définition *Matrice de changement de base*

Étant donné deux bases $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \,\}$ et $\mathcal{B}' = \{\, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n \,\}$ d'un même espace vectoriel, on appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de $\mathbf{e}'_j$ dans la base $\mathcal{B}$ et on la note $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \sum_{i=1}^n p_{i1}\mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}'_2 = \sum_{i=2}^n p_{i2}\mathbf{e}_i \\ \dots \\ \mathbf{e}'_j = \sum_{i=j}^n p_{ij}\mathbf{e}_i \\ \dots \\ \mathbf{e}'_n = \sum_{i=n}^n p_{in}\mathbf{e}_i \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_1,\mathcal{B}) = (p_{11}, p_{21}, \dots, p_{n1}) \\ \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_2,\mathcal{B}) = (p_{12}, p_{22}, \dots, p_{n2}) \\ \dots \\ \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_j,\mathcal{B}) = (p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{nj}) \\ \dots \\ \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_n,\mathcal{B}) = (p_{1n}, p_{2n}, \dots, p_{nn}) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & & & \dots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriété

$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et $(\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

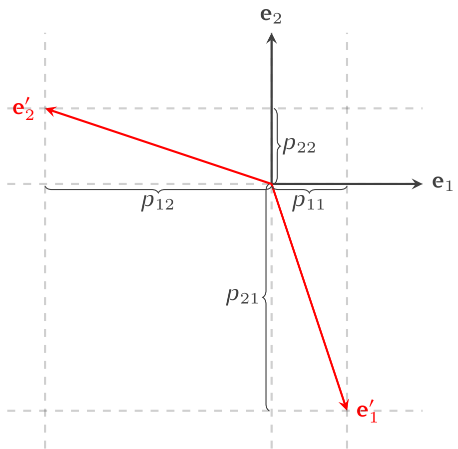
Proposition

Si un vecteur $\mathbf{u} \in E$ a pour coordonnées $\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{B}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{B}') = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$ alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \,\}$ et $\mathcal{B}' = \{\, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \,\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Alors

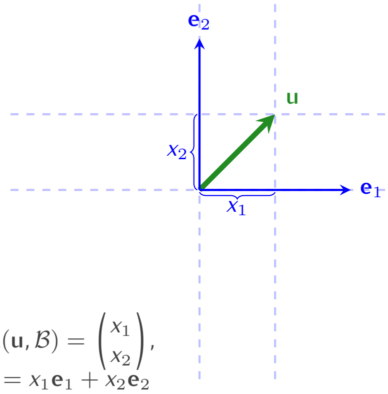


$$\operatorname{coord}(\mathbf{e}'_1,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \text{ i.e. } \mathbf{e}'_1 = p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{21}\mathbf{e}_2$$

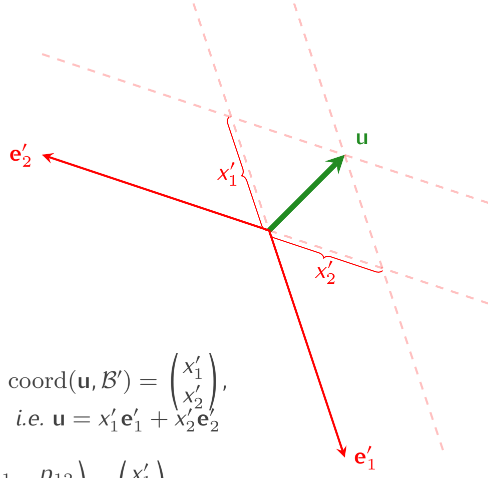
$$\operatorname{coord}(\mathbf{e}'_2,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}, \text{ i.e. } \mathbf{e}'_2 = p_{12}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2$$

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant un vecteur $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}^2$:



$\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,
i.e. $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$



$\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$,
i.e. $\mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{B})} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}}_{\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{B}')}$$

En effet,

$$\mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 = x'_1(p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{21}\mathbf{e}_2) + x'_2(p_{12}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2) = (p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2)\mathbf{e}_1 + (p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2)\mathbf{e}_2 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

Attention

Ne pas confondre le vecteur $\mathbf{u} \in E$ (qui peut être un polynôme, une fonction, une matrice...) avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de E (qu'on peut noter $\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B})$).

Exemple

Le polynôme $p(x) = a + bx + cx^2$ a pour coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{C} = \{ 1, x, x^2 \}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ mais n'est pas égale au vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$. Tous ce qu'on peut dire est que le polynôme $p(x) = a + bx + cx^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ et le vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ ont les mêmes coordonnées dans les bases canoniques respectives.

Astuces

Astuce

Pour démontrer qu'un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E on peut

❶ soit montrer que
- ▷ $\mathbf{0}_E \in F$,
- ▷ $\forall\ \mathbf{u} \in F$ et $\forall\ \mathbf{v} \in F$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$,
- ▷ $\forall\ \mathbf{u} \in F$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \mathbf{u} \in F$;

❷ soit montrer que $F = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de E ;

❸ soit montrer que F est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E.

Astuce

Si $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E et si un des vecteurs de $\mathcal{F}$ (par exemple $\mathbf{e}_1$) est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} \setminus \{ \mathbf{e}_1 \}$ est encore une famille génératrice de E. Ce résultat permet en particulier de construire une base d'un espace vectoriel connaissant une famille génératrice de cet espace.

Astuce

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ d'un espace vectoriel E on cherche d'éventuelles relations entre les vecteurs $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$:
- ▷ si la famille est libre, on en déduit que $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = p$
- ▷ sinon, on cherche à exprimer un vecteur $\mathbf{e}_i$ comme combinaison linéaire des autres vecteurs et on «élimine» ce vecteur de la famille ; on procède ainsi jusqu'à obtenir une famille libre contenue dans $\mathcal{F}$.

Avant de commencer une recherche précise, on peut encadrer $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$. Ainsi

▷ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \le \min\{\, p, \dim(E) \,\}$ si E est de dimension finie ;

▷ si $\mathcal{F}$ contient au moins deux vecteurs non colinéaires alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \ge 2$;

▷ si $\mathcal{F}$ contient une famille libre de q vecteurs, alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \ge q$.

Astuce

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \,\}$ et $\mathcal{W} = \{\, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \,\}$ deux bases de E. Soit $\mathbf{u} \in E$ et supposons de connaître les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, *i.e.* qu'on connaît les n coefficients $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \mathbf{b}_j$. Pour obtenir les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la la base $\mathcal{W}$, *i.e.* les n coefficients $\omega_1, \dots, \omega_n$ tels que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \mathbf{w}_i$, on peut :

▷ soit utiliser la relation
$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_n\end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\mathcal{W}\to\mathcal{B}} \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix};$$

▷ soit exprimer chacun des vecteurs $\mathbf{b}_j$ dans la base $\mathcal{W}$, *i.e.* trouver les n coefficients $\eta_{1j}, \dots, \eta_{nj}$ tels que $\beta_j = \sum_{i=1}^n \eta_{ij} \cdot \mathbf{w}_i$, et on obtient
$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n \eta_{ij} \cdot \mathbf{w}_i \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \eta_{ij}\beta_j \right)}_{\omega_i} \cdot \mathbf{w}_i.$$

Exercices

Exercice 3.1

Démontrer que l'ensemble
$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction. On peut utiliser une des deux méthodes suivantes :

① On montre que
- ▷ $\mathbf{0}_E \in F$: en effet $(0,0,0) \in F$ car $0+0+2\times 0 = 0$;
- ▷ $\forall\ \mathbf{u} \in F$ et $\forall\ \mathbf{v} \in F$, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in F$: soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in F$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in F$, alors $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ et $v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$; soit $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \mathbf{u}+\mathbf{v}$, alors $w_1 + w_2 + 2w_3 = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + 2u_3 + 2v_3 = 0$, donc $\mathbf{w} \in F$;
- ▷ $\forall\ \mathbf{u} \in F$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \mathbf{u} \in F$: soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in F$, alors $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$; soit $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \lambda \cdot \mathbf{u}$, alors $w_1 + w_2 + 2w_3 = \lambda u_1 + \lambda u_2 + 2\lambda u_3 = 0$, donc $\mathbf{w} \in F$.

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

② On montre que $F = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de E. En effet
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \qquad \iff \qquad \begin{cases} x, y, z \in \mathbb{R} \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \\ y = -2z - x. \end{cases}$$
Donc
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ -\kappa_1 - 2\kappa_2 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} \middle|\ \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (Cette méthode permet également d'en déduire que $\{(1,-1,0),(0,-2,1)\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 3.2 *CC Octobre 2011*

Démontrer que l'ensemble
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle|\ a + b = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction.
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle|\ a + b = 0 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ a, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.3

Démontrer que l'ensemble
$$F = \left\{ (x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

$$F=\left\{\begin{pmatrix}\kappa_1\\\kappa_1\\\kappa_2\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\kappa_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\kappa_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.4

Démontrer que l'ensemble

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&b\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction.

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&b\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.5

Démontrer que l'ensemble

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\;a+b+c+d=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction.

$$\begin{aligned}F&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\;a+b+c+d=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&-a-b-c\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{a\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.6 *CC Novembre 2012*

Démontrer que l'ensemble

$$F=\left\{\,a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]\;\middle|\;a+b+2c=0\,\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction. On montre que $F=\operatorname{Vect}\left\{\,\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p\,\right\}$ où $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$. En effet

$$\begin{aligned}F&=\left\{\,a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]\;\middle|\;a+b+2c=0\,\right\}\\&=\left\{\,a+(-2c-a)x+cx^2\;\middle|\;a,c\in\mathbb{R}\,\right\}\\&=\left\{\,a(1-x)+c(-2x+x^2)\;\middle|\;a,c\in\mathbb{R}\,\right\}\\&=\operatorname{Vect}\left\{\,1-x,-2x+x^2\,\right\}.\end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

(On peut également en déduire que $\{1-x,-2x+x^2\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 3.7 *CC Novembre 2012*

Démontrer que l'ensemble
$$F = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0 \}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction. On montre que $F = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$. En effet
$$\begin{aligned} F &= \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b + c = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bx + (-a-b)x^2 \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a(1-x^2) + b(x-x^2) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ 1-x^2, x-x^2 \right\}. \end{aligned}$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

(On peut également en déduire que $\left\{ 1-x^2, x-x^2 \right\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 3.8

Démontrer que l'ensemble
$$F = \left\{ p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(1) = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction. On montre que $F = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_2[x]$. En effet
$$\begin{aligned} F &= \left\{ a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid b + 2c = 0 \right\} \\ &= \left\{ a - 2cx + cx^2 \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a + c(-2x+x^2) \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ 1, -2x+x^2 \right\}. \end{aligned}$$
Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

(On peut également en déduire que $\left\{ 1, -2x+x^2 \right\}$ est une famille génératrice de F.)

Exercice 3.9 *CC Novembre 2012*

Montrer que l'ensemble
$$F = \left\{ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \det(\mathbb{A}) = 0 \right\}$$
n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction. Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de F. Comme $\mathbb{A}+\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}') = 1$, donc $\mathbb{A}+\mathbb{A}' \notin F$.

Exercice 3.10 *CC octobre 2013*

Prouver que les familles suivantes sont libres :

1. $\mathcal{A} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subset \mathbb{R}_2$
2. $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
3. $\mathcal{C} = \left\{ 1, t, t^2 \right\} \subset \mathbb{R}_2[t]$

4. $\mathcal{D} = \{ 1, t, t(t-1), t(t-1)(t-2) \} \subset \mathbb{R}_3[t]$

CORRECTION.

1. $\alpha \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ssi $\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \beta\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ssi $\alpha = \beta = 0$ donc la famille est libre.
2. $\alpha \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) + \gamma \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) + \delta \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) \implies \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta+\gamma = 0\\ \gamma+\delta = 0\\ \delta = 0\end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ donc la famille est libre.
3. C'est la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$ donc la famille est libre.
4. $\alpha + \beta t + \gamma t(t-1) + \delta t(t-1)(t-2) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi $\alpha + (\beta - \gamma + 2\delta)t + (\gamma - 3\delta)t^2 + \delta t^3 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ donc la famille est libre.

Exercice 3.11 *CC Novembre 2012*

Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; ac = b^2 \right\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

CORRECTION. Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de F. Comme $\mathbb{A}+\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\det(\mathbb{A}+\mathbb{A}') = 1$, donc $\mathbb{A}+\mathbb{A}' \notin F$.

Exercice 3.12

Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; ax + by - z = 0,\; bx + y - w \geq 0 \;\forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

n'est pas un espace vectoriel.

CORRECTION. Le vecteur $\mathbf{v} = (0, 0, 0, -1) \in F$ mais $-\mathbf{v} \notin F$ donc F n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 3.13

Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y = 0 \right\}$$

n'est pas un espace vectoriel.

CORRECTION. Soit $\mathbf{u} = (a, b, c)$ et $\mathbf{v} = (d, e, f)$ deux vecteurs de l'ensemble F. Alors $a^2 + b = 0$ et $d^2 + e = 0$. Pour que la somme $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + d, b + e, c + f)$ appartient à F il faut vérifier si $(a + d)^2 + (b + e) = 0$. Or on a $a^2 + d^2 + 2ad + b + e = 2ad$ qui n'est pas forcement 0 donc F n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 3.14

Soient $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$ et $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels x, y, z pour que le vecteur $\mathbf{w} = (x, y, z)$ appartient à $\mathrm{Vect}\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}$.

Correction.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}\in \operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\,\} &\iff \exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \mathbf{w}=a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2\\
&\iff \exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} a+b=x,\\ a+2b=y,\\ a+3b=z\end{cases}\\
&\iff \exists\,(a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} a=2x-y,\\ b=y-x,\\ z=-x+2y\end{cases}\\
&\iff x-2y+z=0.
\end{aligned}$$

Exercice 3.15

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\mathbf{u}=(-2,3,7)$, $\mathbf{v}=(1,-2,-3)$ et $\mathbf{w}=(-1,-1,6)$. Montrer que

$$\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\,\}=\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u},\mathbf{v}\,\}=\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{v},\mathbf{w}\,\}=\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{w},\mathbf{u}\,\}.$$

Correction. Comme $\mathbf{w}=3\mathbf{u}+5\mathbf{v}$, on peut tirer de cette relation l'un des vecteurs en fonction des deux autres, ce qui permet de prouver que les espaces engendrés par deux des trois vecteurs sont égaux à $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\,\}$.

Exercice 3.16

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^2$ de la famille $\mathcal{A}=\{\,\mathbf{u}_1=(3,1),\mathbf{u}_2=(-1,5)\,\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w}=(1,0)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\,\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

Correction. Comme $\det\left(\begin{smallmatrix}3&-1\\1&5\end{smallmatrix}\right)\neq 0$, $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=2$ et l'on a $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=\operatorname{card}(\mathcal{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéaire indépendants. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ on cherche les réels a et b tels que $a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2=\mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases}3a-b=1,\\ a+5b=0\end{cases}\iff a=\frac{5}{16},\quad b=\frac{-1}{16},$$

d'où la relation $\mathbf{w}=\frac{1}{16}(5\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)$.

Exercice 3.17

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathcal{A}=\{\,\mathbf{u}_1=(-1,1,-3),\mathbf{u}_2=(1,2,5),\mathbf{u}_3=(1,7,1)\,\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w}=(1,0,0)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\,\}$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$.

Correction. Comme $\det\left(\begin{smallmatrix}-1&1&1\\1&2&7\\-3&5&1\end{smallmatrix}\right)\neq 0$, $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=3$ et l'on a $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=\operatorname{card}(\mathcal{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont linéairement indépendants, *i.e.* la famille $\mathcal{A}$ est libre. Comme $\operatorname{card}(\mathcal{A})=\dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{A})=\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{w}\in\operatorname{Vect}(\mathcal{A})$. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ on cherche les réels a, b et c tels que $a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2+c\mathbf{u}_3=\mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases}-a+b+c=1,\\a+2b+7c=0,\\-3a+5b+c=0,\end{cases}\iff\begin{cases}-a+b+c=1,\\3b+8c=0,\\2b-2c=-3,\end{cases}\iff\begin{cases}-a+b+c=1,\\3b+8c=0,\\-\frac{22}{3}c=-\frac{11}{3},\end{cases}\iff a=-\frac{3}{2},\ b=-1,\ c=\frac{1}{2},$$

d'où la relation $\mathbf{w}=\frac{1}{2}(-3\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3)$.

Exercice 3.18

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathcal{A}=\{\,\mathbf{u}_1=(1,4,-3),\mathbf{u}_2=(2,5,3),\mathbf{u}_3=(-3,0,-3)\,\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille. Le vecteur $\mathbf{w}=(1,0,0)$ appartient-il à $\operatorname{Vect}(\mathcal{A})$? Si oui, l'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$.

Correction. Comme $\det\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&0\\-3&3&-3\end{smallmatrix}\right)\neq 0$, $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=3$ et l'on a $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=\operatorname{card}(\mathcal{A})$: les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont linéaire indépendants, *i.e.* $\mathcal{A}$ est une famille libre. Comme $\operatorname{card}(\mathcal{A})=\dim(\mathbb{R}^3)$ alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{A})=\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{w}\in\operatorname{Vect}(\mathcal{A})$. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{w}$ en fonction de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ on cherche les réels a, b et c tels que $a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2+c\mathbf{u}_3=\mathbf{w}$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases}a+2b+3c=1,\\4a+5b=0,\\-3a+3b-3c=0,\end{cases}\iff\begin{cases}a+2b+3c=1,\\-3b-12c=-4,\\9b+6c=3,\end{cases}\iff\begin{cases}a+2b+3c=1,\\-3b-12c=-4,\\-30c=9,\end{cases}\iff a=\frac{-1}{6},\ b=\frac{2}{15},\ c=\frac{3}{10},$$

d'où la relation $\mathbf{w}=-\frac{1}{6}\mathbf{u}_1+\frac{2}{15}\mathbf{u}_2+\frac{3}{10}\mathbf{u}_3$.

Exercice 3.19

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $\mathcal{A}=\{\,\mathbf{u}_1=(1,2,3),\mathbf{u}_2=(3,2,1),\mathbf{u}_3=(3,3,3),\mathbf{u}_4=(7,0,-7)\,\}$. Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille.

Correction. Sans faire de calcul on sait que $\operatorname{rg}(\mathcal{A})\leq 3$ donc au moins un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Comme $4\mathbf{u}_3=3\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2$ donc $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\,\}=\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\,\}$. Comme $2\mathbf{u}_4=-7\mathbf{u}_1+7\mathbf{u}_2$ alors $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\,\}=\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\,\}$. Comme $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants et on conclut que $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=2$.

Exercice 3.20

Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^5$ de la famille

$$\mathcal{A}=\{\,\mathbf{u}_1=(1,1,1,2,5),\mathbf{u}_2=(2,1,0,3,4),\mathbf{u}_3=(-1,0,-1,4,7),\mathbf{u}_4=(-9,-2,1,-1,9)\,\}.$$

Si le rang de la famille est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille, on déterminera une ou des relations non triviales entre les vecteurs de la famille.

Correction. Sans faire de calcul on sait que $1\leq\operatorname{rg}(\mathcal{A})\leq 4$. Comme $\mathbf{u}_4=3\mathbf{u}_1-5\mathbf{u}_2+2\mathbf{u}_3$ donc $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\,\}=\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\,\}$. Comme $\det\left(\begin{smallmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\1&0&-1\end{smallmatrix}\right)\neq 0$, on conclut que $\operatorname{rg}(\mathcal{A})=3$.

Exercice 3.21

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (2, 3, -1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, -1, -2)$$

et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (3, 7, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 0, -7)$$

sont les mêmes.

Correction. Pour montrer l'égalité des deux ensembles, on va prouver les deux inclusions réciproques : $\operatorname{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ et $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \operatorname{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

① $\operatorname{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$: il suffit de montrer que $\mathbf{v}_1 \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ et $\mathbf{v}_2 \in \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, ce qui suit de la remarque $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

② $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \operatorname{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$: il suffit de montrer que $\mathbf{u}_1 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ et $\mathbf{u}_2 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, ce qui suit de la remarque $7\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ et $7\mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$.

Exercice 3.22 *CT Septembre 2009*

Montrer que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1, 3), \quad \mathbf{u}_2 = (2, 4, 1, -2), \quad \mathbf{u}_3 = (3, 6, 3, -7)$$

et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, -4, 11), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 4, -5, 14)$$

sont les mêmes.

Correction. On note U l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ et V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. Remarquons tout d'abord que si $U = V$ alors $\dim(U) = \dim(V) = 2$ donc la famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ n'est pas libre.

Pour démontrer que $U = V$ on montre que $U \subset V$ et que $V \subset U$.

▷ Pour montrer que $U \subset V$ il suffit de montrer que chaque $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{u}_1 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \iff \begin{cases} 1 = a + 2b, \\ 2 = 2a + 4b, \\ -1 = -4a - 5b, \\ 3 = 11a + 14b, \end{cases} \iff a = -1, \ b = 1$$

$$\mathbf{u}_2 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \iff \begin{cases} 2 = a + 2b, \\ 4 = 2a + 4b, \\ 1 = -4a - 5b, \\ -2 = 11a + 14b, \end{cases} \iff a = -4, \ b = 3$$

$$\mathbf{u}_3 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \iff \begin{cases} 3 = a + 2b, \\ 6 = 2a + 4b, \\ 3 = -4a - 5b, \\ -7 = 11a + 14b, \end{cases} \iff a = -7, \ b = 5$$

▷ Pour montrer que $V \subset U$ il suffit de montrer que chaque $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \iff \begin{cases} 1 = a + 2b + 3c, \\ 2 = 2a + 4b + 6c, \\ -4 = -a + b + 3c, \\ 11 = 3a - 2b - 7c, \end{cases} \iff a = 3 + \kappa,\ b = -1 - 2\kappa,\ c = \kappa,$$

$$\mathbf{v}_2 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \iff \begin{cases} 2 = a + 2b + 3c, \\ 4 = 2a + 4b + 6c, \\ -5 = -a + b + 3c, \\ 14 = 3a - 2b - 7c, \end{cases} \iff a = 4 - \kappa,\ b = -1 - 2\kappa,\ c = \kappa,$$

Exercice 3.23

Soient $p_0(x) = x+1$, $p_1(x) = x^2+x$ et $p_2(x) = 2x^2+1$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$. Démontrer que $\operatorname{Vect}\{ p_0, p_1, p_2 \} = \mathbb{R}_2[x]$.

Correction.

Méthode 1 : pour prouver l'égalité de deux ensembles A et B, on peut démontrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$. Pour démontrer que $A \subset B$, on considère un élément quelconque de A et on démontre qu'il appartient à B.

▷ Comme $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ qui est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de ces trois polynômes est encore un élément de $\mathbb{R}_2[x]$, par conséquent $\operatorname{Vect}\{ p_0, p_1, p_2 \} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

▷ $\mathbb{R}_2[x] \subset \operatorname{Vect}\{ p_0, p_1, p_2 \}$ ssi pour tout $q \in \mathbb{R}_2[x]$ il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2$:

$$\begin{aligned} q(x) = a + bx + cx^2 \in \operatorname{Vect}\{ p_0, p_1, p_2 \} &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } q = \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 \\ &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = \lambda_0(x+1) + \lambda_1(x^2+x) + \lambda_2(2x^2+1) \\ &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a + bx + cx^2 = (\lambda_0 + \lambda_2) + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x^2 \\ &\iff \exists\, (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = a, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = b, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = c. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, le système est de Cramer et on peut conclure que $\mathbb{R}_2[x] \subset \operatorname{Vect}\{ p_0, p_1, p_2 \}$. Après résolution du système linéaire on trouve $q = bp_0 + (-a+b+c)p_1 + (a-b)p_2$.

Méthode 2 : comme $\operatorname{card}(\{ p_0, p_1, p_2 \}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$, il suffit de prouver que la famille $\{ p_0, p_1, p_2 \}$ est libre, *i.e.* "$\lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = 0 \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$" :

$$\begin{aligned} \lambda_0 \cdot p_0 + \lambda_1 \cdot p_1 + \lambda_2 \cdot p_2 = 0 &\iff \lambda_0(x+1) + \lambda_1(x^2+x) + \lambda_2(2x^2+1) = 0 \\ &\iff (\lambda_0 + \lambda_2) + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, le système admet l'unique solution nulle et on peut conclure que $\operatorname{Vect}\{ p_0, p_1, p_2 \} = \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 3.24

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \{\, \mathbf{u} = (2,3), \mathbf{v} = (4,5) \,\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2a_1 + 4a_2 = 0, \\ 3a_1 + 5a_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre.

(On peut remarquer que, $\mathcal{F}$ étant libre et comme $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 2$, elle engendre un espace vectoriel de dimension 2. Puisque $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, on conclut que $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^2$.)

Exercice 3.25

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \{\, \mathbf{u} = (1,0,1), \mathbf{v} = (2,1,0), \mathbf{w} = (0,-1,2) \,\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \quad \Longleftrightarrow \quad a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w} = (0,0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0, \\ a_2 - a_3 = 0, \\ a_1 + 2a_3 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -2\kappa, \\ a_2 = \kappa, \\ a_3 = \kappa \end{cases}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa = 1$, on a $\mathbf{w} = 2 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Exercice 3.26

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{C} = \mathbb{I}_3 \right\}$$

de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \implies \qquad a_i = 0 \ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbb{A} + a_2\mathbb{B} + a_3\mathbb{C} = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} 3a_1 + a_2 + a_3 = 0,\\ 2a_1 + a_2 = 0,\\ a_1 + a_2 = 0,\\ a_1 + a_2 = 0,\\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 0,\\ 3a_1 + a_2 = 0,\\ 2a_1 + a_2 = 0,\\ a_1 + a_2 = 0,\\ 3a_1 + a_2 + a_3 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0,\\ a_2 = 0,\\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre.

Exercice 3.27 *CC novembre 2013*

Considérons les matrices d'ordre 2 à coefficients réels

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} \kappa & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de $\kappa \in \mathbb{R}$ les trois matrices forment une famille libre ?

Correction. Nous pouvons tout de suite dire que si $\kappa = 0$ alors la famille n'est pas libre.
La famille $\mathcal{F} = \{ \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \}$ est libre lorsque

$$\alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B} + \gamma\mathbb{C} = \mathbb{O}_2 \qquad \implies \qquad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

On a

$$\alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B} + \gamma\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \beta + \kappa\gamma = 0,\\ \kappa\beta + \gamma = 0,\\ \kappa\alpha - 2\beta - \gamma = 0,\\ \gamma = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 0,\\ \kappa\alpha = 0,\\ \gamma = 0. \end{cases}$$

La famille est libre ssi $\kappa \neq 0$.

Exercice 3.28

Étudier si la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ p_0(x) = x^3 + x^2, p_1(x) = x^2 + x, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^3 + 1 \right\}$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ est libre. Si la famille est liée, trouver une relation entre les vecteurs de cette famille.

Correction. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0 \iff (a_2 + a_3) + (a_1 + a_2)x + (a_0 + a_1)x^2 + (a_0 + a_3)x^3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \\ a_0 + a_1 = 0, \\ a_0 + a_3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = \kappa, \\ a_1 = -\kappa, \\ a_2 = \kappa, \\ a_3 = -\kappa, \end{cases} \quad \text{pour tout } \kappa \in \mathbb{R}$$

donc la famille est liée. De plus, en prenant par exemple $\kappa = 1$ on a $p_3 = p_0 - p_1 + p_2$.

Exercice 3.29 *CC Novembre 2012*

On considère dans $\mathbb{R}^n$, $n \ge 4$, une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \}$. Les familles suivantes sont libres ?

① $\{ \mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$

② $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \}$

③ $\{ \mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \}$

④ $\{ 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \}$

⑤ $\{ 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \}$

Correction.

① Oui

② Oui

③ Non

④ Oui car $\alpha(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) + \beta(\mathbf{e}_3) + \gamma(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \implies 3\alpha\mathbf{e}_1 + \gamma\mathbf{e}_2 + (\alpha + \beta + \gamma)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. Comme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont linéairement indépendants, cela implique $3\alpha = \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$

⑤ Non : $-7(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + 3(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)$

Exercice 3.30 *CC Novembre 2012*

On considère dans $\mathbb{R}^n$, $n \ge 4$, une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \}$. Les familles suivantes sont libres ?

① $\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \}$

② $\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \}$

③ $\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \}$

④ $\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \}$

⑤ $\{ 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \}$

Correction.

① Oui

② Oui

③ Oui

④ Non

⑤ Non : $-7(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + 3(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)$

Exercice 3.31

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $\{\,\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\,\}$. Les familles suivantes sont libres ?

① $\{\,2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\,\}$

② $\{\,\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3\,\}$

③ $\{\,\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\,\}$

④ $\{\,3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\,\}$

⑤ $\{\,2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\,\}$

Correction.

① Oui

② Oui

③ Non

④ Oui

⑤ Non : $-7(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1) = 2(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)+3(\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2)$

Exercice 3.32 *CC Novembre 2012*

Écrire la base canonique de $\mathbb{R}_3$, la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$.

Correction.

1. Base canonique de $\mathbb{R}_3$: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$
2. Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$
3. Base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$: $\{\,1, t, t^2\,\}$

Exercice 3.33 *CC Novembre 2012*

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille libre d'éléments de V. Donner la définition de $\operatorname{card}(\mathcal{F})$ et de $\dim(V)$. Si $\dim(V) = \operatorname{card}(\mathcal{F})$, que peut-on conclure ?

Correction.

1. Le cardinal d'une famille est le nombre d'éléments qui la constitue.
2. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments d'une de ses bases, *i.e.* le cardinal d'une de ses bases.
3. Si la dimension de l'espace vectoriel V coïncide avec le cardinal de la famille $\mathcal{F}$ contenue dans V, alors la famille $\mathcal{F}$ constitue une base de V. Attention : si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on ne peut rien conclure.

Exercice 3.34

Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = (1,-1,i)$, $\mathbf{w}_2 = (-1,i,1)$ et $\mathbf{w}_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$. Calculer ensuite les coordonnées de $\mathbf{w} = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Correction. Comme $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & i & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2i$, les vecteurs constituent une famille libre. Étant donné que $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$ et que $\mathbf{w}_i \in \mathbb{C}^3$ pour $i = 1, 2, 3$, la famille $\{\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \,\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

On cherche maintenant $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 + c\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}$:

$$\begin{cases} a - b + ic = 1 + i \\ -a + ib + c = 1 - i \\ ia + b - c = i \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ c = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{cases}$$

Exercice 3.35 *CC Novembre 2011*

Vrai ou Faux ?

① Toute famille génératrice contient une base.

② La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur de cet espace.

③ Toute famille contenant une famille liée est liée.

④ La base de $\mathbb{R}_3[x]$ est $\{\, 1, x, x^2, x^3 \,\}$.

⑤ Si $E = \operatorname{Vect}\{\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\}$ et si $\{\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\}$ est une famille libre, alors $\dim(E) = 3$.

⑥ $\operatorname{Vect}\{\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p \,\} = \operatorname{Vect}\{\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{p-1} \,\}$ si et seulement si $\mathbf{u}_p$ est combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{p-1}$.

⑦ Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que deux vecteurs parmi ces trois ne sont pas colinéaires. Alors la famille $\{\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\}$ est libre.

Correction.

① Vrai (dans le sens que d'une famille génératrice on peut extraire une famille libre qui génère le même espace vectoriel).

② Faux. Un espace vectoriel de dimension finie a une infinité de vecteurs. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur d'une de ces bases.

③ Vrai. La relation non trivial qui lie des vecteurs de la plus petite des deux familles est vraie dans la plus grande.

④ Incorrect. On ne peut pas parler de «la» base de $\mathbb{R}_3[x]$ car il y en a une infinité.

⑤ Vrai. La famille $\{\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\}$ est une base de E car libre et génératrice de E.

⑥ Vrai.

⑦ Faux. Par exemple si $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, deux vecteurs parmi ces trois ne sont pas colinéaires mais la famille $\{\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,\}$ est liée.

Exercice 3.36

Considérons l'ensemble

$$F = \{\, (x, x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction.

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} \middle| \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Les deux vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 1)$ constituent une famille génératrice de F. Comme ils ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de F. Comme $\operatorname{card}(\{\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \,\}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 3.37

Considérons l'ensemble
$$F = \left\{ a + ax^2 + bx^4 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction.

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$ car
$$F = \left\{ a + ax^2 + bx^4 \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a(1 + x^2) + bx^4 \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ 1 + x^2, x^4 \right\}.$$
2. Les deux polynômes $p(x) = 1 + x^2$ et $q(x) = x^4$ constituent une famille génératrice de F. Comme ils ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de F. Comme $\mathrm{card}(\{ p, q \}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 3.38

Considérons l'ensemble
$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction.

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ -2\kappa_1 - \kappa_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$
2. Les deux vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2)$ et $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1)$ constituent une famille génératrice de F. Comme ils ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de F. Comme $\mathrm{card}(\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 3.39

Considérons l'ensemble
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction.

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car
$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \kappa_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \kappa_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. Les trois matrice $\mathbb{I}_3$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ constituent une famille génératrice de F. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbb{I}_3 + a_2\mathbb{A} + a_3\mathbb{B} = \mathbb{O}_3 \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_1 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{F} = \{ \mathbb{I}_3, \mathbb{A}, \mathbb{B} \}$ est libre et est une base de F. Comme $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 3$, alors $\dim(F) = 3$.

Exercice 3.40 *CC octobre 2013*

Considérons l'ensemble

$$F = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1) = 0 \}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

Correction.

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ car

$$F = \{ x(x-1)(ax+b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \left\{ a\Big(x^2(x-1)\Big) + b\Big(x(x-1)\Big) \;\Big|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ x^2(x-1), x(x-1) \right\}.$$

Si on n'a pas remarqué que 0 et 1 sont racines des polynômes de F, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} F &= \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p(1) = 0 \} \\ &= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; a = 0 \text{ et } a + b + c + d = 0 \right\} \\ &= \left\{ bx + cx^2 + (-b-c)x^3 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b(x - x^3) + c(x^2 - x^3) \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ x - x^3, x^2 - x^3 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Les deux polynômes $p(x) = x - x^3$ et $q(x) = x^2 - x^3$ constituent une famille génératrice de F. On montre que la famille $\mathcal{F} = \left\{ x - x^3, x^2 - x^3 \right\}$ est une base de l'espace vectoriel F ; en effet

$$\alpha(x-x^3)+\beta(x^2-x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha x+\beta x^2+(-\alpha-\beta)x^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Comme $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 2$, alors $\dim(F) = 2$.

Exercice 3.41 *CC Novembre 2012*

Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. Soit $U = \{ p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(-1) = 0 \}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$ et en donner une base.

Correction. On montre que $U = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned} U &= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; a - b + c - d = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bx + cx^2 + (a - b + c)x^3 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a(1 + x^3) + b(x - x^3) + c(x^2 + x^3) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ 1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

(On peut également en déduire que $\left\{ 1 + x^3, x - x^3, x^2 + x^3 \right\}$ est une famille génératrice de U)

Exercice 3.42 *CC octobre 2013*

Démontrer que l'ensemble

$$F = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; p(0) = p'(1) = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ et en donner une base.

Correction. On montre que $F = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[x]$. En effet

$$\begin{aligned} F &= \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; p(0) = p'(1) = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; a = 0 \text{ et } b + 2c + 3d = 0 \right\} \\ &= \left\{ bx + cx^2 + \frac{-b - 2c}{3}x^3 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b(x - x^3/3) + c(x^2 - 2x^3/3) \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

On montre que la famille $\mathcal{F} = \left\{ x - \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right\}$ est une base de l'espace vectoriel F ; en effet

$$\alpha(x - x^3/3) + \beta(x^2 - 2x^3/3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha x + \beta x^2 + (-\alpha - 2\beta)x^3/3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Exercice 3.43 *CT Janvier 2011*

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 avec les entrées réelles. Soient a, b et c trois nombres réels quelconques. Considérons le sous-ensemble

$$E = \left\{ \mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a + b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner une base explicite de E.

Correction.

1. E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} a + b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. Les trois matrice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ constituent une famille génératrice de E. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall \ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff a_1\mathbb{A} + a_2\mathbb{B} + a_3\mathbb{C} = \mathbb{O}_2 \iff \begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ 2a_3 = 0, \\ -a_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre et est une base de E. Comme $\operatorname{card}\{ \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \} = 3$, alors $\dim(E) = 3$.

Exercice 3.44 *CT Septembre 2009*

Soit V l'espace vectoriel des matrices $\mathbb{M}$ carrées d'ordre n (sur le corps des réels).

1. Montrer que le sous-ensemble W de ces matrices qui commutent avec une matrice donnée $\mathbb{T}$

$$W = \{ \mathbb{M} \in V \mid \mathbb{M} \times \mathbb{T} = \mathbb{T} \times \mathbb{M} \}$$

est un sous-espace vectoriel de V.

2. Soit $\mathbb{T}$ la matrice d'ordre 2 définie par

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la dimension et une base de W dans ce cas.

Correction.

1. On montre que
   - ▷ $\mathbf{0}_V = \mathbb{O}_n \in W$: en effet $\mathbb{O}_n \in W$ car $\mathbb{O}_n \times \mathbb{T} = \mathbb{O}_m = \mathbb{T} \times \mathbb{O}_n$;
   - ▷ $\forall\ \mathbb{A} \in W$ et $\forall\ \mathbb{B} \in W$, $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in W$: en effet, soit $\mathbb{C} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$, alors $\mathbb{C} \times \mathbb{T} = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) \times \mathbb{T} = \mathbb{A} \times \mathbb{T} + \mathbb{B} \times \mathbb{T} = \mathbb{T} \times \mathbb{A} + \mathbb{T} \times \mathbb{B} = \mathbb{T} \times (\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \mathbb{T} \times \mathbb{C}$, donc $\mathbb{C} \in W$;
   - ▷ $\forall\ \mathbb{A} \in W$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \mathbb{A} \in W$: en effet, soit $\mathbb{C} = \lambda \cdot \mathbb{A}$, alors $\mathbb{C} \times \mathbb{T} = (\lambda \cdot \mathbb{A}) \times \mathbb{T} = \lambda \cdot (\mathbb{A} \times \mathbb{T}) = \lambda \cdot (\mathbb{T} \times \mathbb{A}) = \mathbb{T} \times (\lambda \cdot \mathbb{A}) = \mathbb{T} \times \mathbb{C}$, donc $\mathbb{C} \in W$.

   Par conséquent W est un sous-espace vectoriel de V.
2. Soit $\mathbb{T}$ la matrice d'ordre 2 définie par

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Comme ces deux matrices ne sont pas colinéaires, cette famille est libre donc elle est une base de W qui a dimension 2.

Exercice 3.45 *CT Février 2010*

Trouver une base de l'espace engendré par les polynômes dans les deux familles suivantes

1. $W = \left\{ 1+2x+3x^2, x+2x^2, 1+2x+4x^2, 1+x \right\}$
2. $W = \left\{ 2+2x^2, 2+x-x^2, 3+x+x^2, 3+x+3x^2 \right\}$

Correction.

1. Notons
$$w_1(x) = 1+2x+3x^2, \qquad w_2(x) = x+2x^2, \qquad w_3(x) = 1+2x+4x^2, \qquad w_4(x) = 1+x.$$
W est une famille non libre si et seulement si
$$\begin{aligned}
&\exists(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid aw_1(x)+bw_2(x)+cw_3(x)+dw_4(x) = 0 \iff\\
&\exists(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid (a+c+d)+(2a+b+2c+d)x+(3a+2b+4c)x^2 = 0 \iff\\
&\begin{cases} a \quad +c+d=0,\\ 2a\ +b+2c+d=0,\\ 3a+2b+4c \quad =0\end{cases} \iff \begin{cases} a \quad +c\ +d=0,\\ b \quad -d=0,\\ 2b+c-3d=0\end{cases} \iff \begin{cases} a\ +c+d=0,\\ b \quad -d=0,\\ c-d=0\end{cases} \iff\\
&(a,b,c,d) = (-2\kappa,\kappa,\kappa,\kappa), \ \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$
Autrement dit $w_4 = 2w_1 - w_2 - w_3$. On a alors
$$\mathrm{Vect}\left\{ w_1,w_2,w_3,w_4 \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ w_1,w_2,w_3 \right\}.$$
Vérifions si la famille $\left\{ w_1,w_2,w_3 \right\}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p \right\}$ est libre lorsque
$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \implies \qquad a_i = 0 \ \forall\ i.$$
Ici
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E &\iff aw_1+bw_2+cw_3 = 0\\
&\iff (a+c)+(2a+b+2c)x+(3a+2b+4c)x^2 = 0\\
&\iff \begin{cases} a \quad +c=0,\\ 2a\ +b+2c=0,\\ 3a+2b+4c=0\end{cases} \iff a=b=c=0
\end{aligned}$$
donc la famille est libre. Par conséquent $\left\{ w_1,w_2,w_3 \right\}$ est une base de l'espace $\mathrm{Vect}(W)$.

2. Notons
$$w_1(x) = 2+2x^2, \qquad w_2(x) = 2+x-x^2, \qquad w_3(x) = 3+x+x^2, \qquad w_4(x) = 3+x+3x^2.$$
W est une famille non libre si et seulement si
$$\begin{aligned}
&\exists(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid aw_1(x)+bw_2(x)+cw_3(x)+dw_4(x) = 0 \iff\\
&\exists(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0) \mid (2a+2b+3c+3d)+(b+c+d)x+(2a-b+c+3d)x^2 = 0 \iff\\
&\begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0,\\ b\ +c\ +d=0,\\ 2a\ -b\ +c+3d=0,\end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0,\\ b\ +c\ +d=0,\\ b+4c+6d=0,\end{cases} \iff \begin{cases} 2a+2b+3c+3d=0,\\ b\ +c\ +d=0,\\ 3c+5d=0,\end{cases} \iff\\
&(a,b,c,d) = (\kappa,2\kappa,-5\kappa,3\kappa), \ \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$
Autrement dit $3w_4 = -w_1 - 2w_2 + 5w_3$. On a alors
$$\mathrm{Vect}\left\{ w_1,w_2,w_3,w_4 \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ w_1,w_2,w_3 \right\}.$$
Vérifions si la famille $\left\{ w_1,w_2,w_3 \right\}$ est libre : on dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_p \right\}$ est libre lorsque
$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \implies \qquad a_i = 0 \ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$$

$$\iff (2a+2b+3c) + (b+c)x + (2a-b+c)x^2 = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2a+2b+3c=0,\\ \quad b+c=0,\\ \quad b+4c=0, \end{cases} \iff a=b=c=0$$

donc la famille est libre. Par conséquent $\{ w_1, w_2, w_3 \}$ est une base de l'espace $\mathrm{Vect}(W)$.

Exercice 3.46 *CC Novembre 2012*

Soit

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

une famille d'éléments de l'espace vectoriel $E = \left\{ \mathbb{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathbb{M} = \mathbb{M}^T \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice de E, *i.e.* $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$;
2. montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas libre ;
3. extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Correction. On remarque que

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, *i.e.* s'il existe λ_1, λ_2, λ_3 et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \lambda_1\mathbb{B}_1 + \lambda_2\mathbb{B}_2 + \lambda_3\mathbb{B}_3 + \lambda_4\mathbb{B}_4, \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

i.e. si et seulement si, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, le système linéaire suivant admet (au moins) une solution

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a,\\ \lambda_2 + \lambda_3 = b,\\ \lambda_2 + \lambda_3 = b,\\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = c. \end{cases}$$

La matrice augmentée associée à ce système est

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right).$$

Comme la seconde et la troisième ligne sont égales alors $\mathrm{rg}(\mathbb{A})$ et $\mathrm{rg}([\mathbb{A}|b])$ sont < 4. Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|b]) = 3$: le système admet une solution (non unique car le rang n'est pas maximal).

2. $\mathcal{F}$ n'est pas libre car $2\mathbb{B}_4 = \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}_3$
3. On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B} = \{ \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3 \}$ qui est une base de E car
   (i) $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3$,
   (ii) $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$,
   (iii) $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $\lambda_1\mathbb{B}_1 + \lambda_2\mathbb{B}_2 + \lambda_3\mathbb{B}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exercice 3.47 *CC Novembre 2012*

Soit
$$\mathcal{F}=\left\{\ \mathbb{B}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\mathbb{B}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\mathbb{B}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\mathbb{B}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ \right\}$$
une famille d'éléments de l'espace vectoriel $E=\left\{\ \mathbb{M}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ \middle|\ \mathbb{M}=\mathbb{M}^T\ \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice de E, *i.e.* $E=\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$;
2. montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas libre ;
3. extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.

Correction. On remarque que
$$E=\left\{\ \begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\ \right\}$$
et $\mathbb{B}_i\in E$ pour tout $i=1,2,3,4$.

1. La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E si $E=\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$, *i.e.* s'il existe λ_1, λ_2, λ_3 et $\lambda_4\in\mathbb{R}$ tels que
$$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=\lambda_1\mathbb{B}_1+\lambda_2\mathbb{B}_2+\lambda_3\mathbb{B}_3+\lambda_4\mathbb{B}_4,\qquad\forall a,b,c\in\mathbb{R}$$
i.e. si et seulement si, pour tout $a,b,c\in\mathbb{R}$, le système linéaire suivant admet (au moins) une solution
$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=a,\\\lambda_2+\lambda_3=b,\\\lambda_2+\lambda_3=b,\\\lambda_3+\lambda_4=c.\end{cases}$$
La matrice augmentée associée à ce système est
$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&a\\0&1&1&0&b\\0&1&1&0&b\\0&0&1&1&c\end{array}\right).$$
Comme la seconde et la troisième ligne sont égales alors $\operatorname{rg}(\mathbb{A})$ et $\operatorname{rg}([\mathbb{A}|b])$ sont <4. Puisque $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}\neq0$, alors $\operatorname{rg}(\mathbb{A})=\operatorname{rg}([\mathbb{A}|b])=3$: le système admet une solution (non unique car le rang n'est pas maximal).
2. $\mathcal{F}$ n'est pas libre car $\mathbb{B}_4=\mathbb{B}_1-\mathbb{B}_2+\mathbb{B}_3$
3. On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B}=\{\ \mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2,\mathbb{B}_3\ \}$ qui est une base de E car
   (i) $\mathbb{B}_i\in E$ pour tout $i=1,2,3$,
   (ii) $\operatorname{card}(\mathcal{B})=\dim(E)$,
   (iii) $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $\lambda_1\mathbb{B}_1+\lambda_2\mathbb{B}_2+\lambda_3\mathbb{B}_3=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Exercice 3.48 *Changement de base*

Soit
$$\begin{aligned}q_0(x)&=1+x+x^2+x^3,\\q_1(x)&=x+x^2+x^3,\\q_2(x)&=x^2+x^3,\\q_3(x)&=x^3,\end{aligned}$$
quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$.

1. Démontrer que l'ensemble $\{\ q_0,q_1,q_2,q_3\ \}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ qu'on notera $\mathcal{B}$.
2. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ puis $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.
3. Exprimer le polynôme $a+bx+cx^2+dx^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Correction.

1. Pour montrer que l'ensemble $\left\{\, q_0, q_1, q_2, q_3 \,\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ il faut montrer qu'il s'agit d'une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \left\{\, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \,\right\}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad a_i = 0 \ \forall\ i = 1, \dots, p.$$

Ici

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \iff\ & a_0 q_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 = 0 \\ \iff\ & a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + (a_0+a_1+a_2+a_3)x^3 = 0 \iff \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

donc la famille est libre. Comme $\operatorname{card}(\operatorname{Vect}\{\, q_0, q_1, q_2, q_3 \,\}) = 4$ et $\dim(\mathbb{R}_4[x]) = 4$, alors $\mathcal{B} = \{\, q_0, q_1, q_2, q_3 \,\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. $\mathcal{C} = \left\{\, c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2, x_3(x) = x^3 \,\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Par définition la matrice $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ est telle que sa j-ème colonne est constituée des coordonnées de q_j dans la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= 1\cdot c_0(x) + 1\cdot c_1(x) + 1\cdot c_2(x) + 1\cdot c_3(x) && \Longrightarrow \operatorname{coord}(q_0, \mathcal{C}) = (1,1,1,1)\\
q_1(x) &= 0\cdot c_0(x) + 1\cdot c_1(x) + 1\cdot c_2(x) + 1\cdot c_3(x) && \Longrightarrow \operatorname{coord}(q_1, \mathcal{C}) = (0,1,1,1)\\
q_2(x) &= 0\cdot c_0(x) + 0\cdot c_1(x) + 1\cdot c_2(x) + 1\cdot c_3(x) && \Longrightarrow \operatorname{coord}(q_2, \mathcal{C}) = (0,0,1,1)\\
q_3(x) &= 0\cdot c_0(x) + 0\cdot c_1(x) + 0\cdot c_2(x) + 1\cdot c_3(x) && \Longrightarrow \operatorname{coord}(q_3, \mathcal{C}) = (0,0,0,1)
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = (\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}})^{-1}$; pour inverser la matrice on peut utiliser la méthode de Gauss

$$\begin{aligned}
[\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}|\mathbb{I}_4] = &\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&1&1&0&-1&0&1&0\\ 0&1&1&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_2]{L_3\leftarrow L_3-L_2}\\
&\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&-1&1&0\\ 0&0&1&1&0&-1&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&-1&1 \end{array}\right) = [\mathbb{I}_4|\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}]
\end{aligned}$$

ou résoudre directement le système linéaire (ici c'est très facile car il s'agit d'un système triangulaire) :

$$\begin{cases} q_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ q_1 &= c_1 + c_2 + c_3, \\ q_2 &= c_2 + c_3, \\ q_3 &= c_3, \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 &= q_0 - q_1, \\ c_1 &= q_1 - q_2, \\ c_2 &= q_2 - q_3, \\ c_3 &= q_3, \end{cases}$$

ainsi

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$c_0(x) = 1\cdot q_0(x) - 1\cdot q_1(x) + 0\cdot q_2(x) + 0\cdot q_3(x) \qquad \textit{i.e.} \quad \operatorname{coord}(c_0, \mathcal{B}) = (1,-1,0,0),$$

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= 0\cdot q_0(x)+1\cdot q_1(x)-1\cdot q_2(x)+0\cdot q_3(x) && \text{i.e.}\quad \operatorname{coord}(c_1,\mathcal{B})=(0,1,-1,0),\\
c_2(x) &= 0\cdot q_0(x)+0\cdot q_1(x)+1\cdot q_2(x)-1\cdot q_3(x) && \text{i.e.}\quad \operatorname{coord}(c_2,\mathcal{B})=(0,0,1,-1),\\
c_3(x) &= 0\cdot q_0(x)+0\cdot q_1(x)+0\cdot q_2(x)+1\cdot q_3(x) && \text{i.e.}\quad \operatorname{coord}(c_3,\mathcal{B})=(0,0,0,1).
\end{aligned}
$$

3. Soit le polynôme $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$; dans la base $\mathcal{C}$ il a coordonnées (a,b,c,d), dans la base $\mathcal{B}$ il a coordonnées
$$
\operatorname{coord}(p,\mathcal{B})=\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\operatorname{coord}(p,\mathcal{C})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b-a\\c-b\\d-c\end{pmatrix}.
$$

Exercice 3.49 *Rang d'une famille de vecteurs*

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le rang de la famille
$$
\mathcal{E}=\{\,\mathbf{u}_1=(1,2,3),\mathbf{u}_2=(2,-1,1),\mathbf{u}_3=(1,0,1),\mathbf{u}_4=(0,1,1)\,\}.
$$

Correction. Notons $\mathcal{F}=\operatorname{Vect}(\mathcal{E})$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{E}$.

▷ Comme $\operatorname{card}(\mathcal{E})=4$ alors $\operatorname{rg}(\mathcal{E})=\dim(\mathcal{F})\le 4$.

▷ Comme $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\dim(\mathcal{F})\le\dim(\mathbb{R}^3)=3$ ainsi $\operatorname{rg}(\mathcal{E})=\dim(\mathcal{F})\le 3$.

▷ Comme $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéairement indépendants, alors $\dim(\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\,\})=2$ et comme $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\,\}\subset\mathcal{F}$, on obtient $\operatorname{rg}(\mathcal{E})=\dim(\mathcal{F})\ge 2$.

▷ Étudions maintenant la famille $\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\,\}\subset\mathcal{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\,\})=3$ alors $\operatorname{rg}(\mathcal{E})=3$; si elle est liée on ne peut pas conclure. On étudiera alors la famille $\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\,\}\subset\mathcal{E}$: si elle est libre, comme $\dim(\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\,\})=3$ alors $\operatorname{rg}(\mathcal{E})=3$; si elle est liée $\operatorname{rg}(\mathcal{E})=2$.
Comme $5\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2$, la famille $\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\,\}$ est liée.
Comme $5\mathbf{u}_4=2\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$, la famille $\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4\,\}$ est liée.

On conclut que $\operatorname{rg}(\mathcal{E})=2$.

Exercice 3.50

On pose $\mathbf{u}_1=(3,4,2)$, $\mathbf{u}_2=(0,1,-1)$, $\mathbf{v}_1=(-1,2,1)$ et $\mathbf{v}_2=(-4,2,0)$. Déterminer les vecteurs appartenant à l'intersection $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\,\}\cap\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\,\}$.

Correction. Un vecteur $\mathbf{w}$ de l'intersection s'écrit à la fois $a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2$ et $c\mathbf{v}_1+d\mathbf{v}_2$, ce qui donne le système
$$
\begin{cases}3a=-c-4d,\\4a+b=2c+2d,\\2a-b=c\end{cases}\iff\begin{cases}3a+c+4d=0,\\4a+b-2c-2d=0,\\2a-b-c=0\end{cases}\iff\quad d=3\kappa,\ c=-6\kappa,\ b=2\kappa,\ a=-2\kappa.
$$

Par conséquent $\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\,\}\cap\operatorname{Vect}\{\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\,\}=\{\,-2\kappa\mathbf{u}_1+2\kappa\mathbf{u}_2\mid\kappa\in\mathbb{R}\,\}=\{\,2\kappa\cdot(-3,-4+1,-2-1)\mid\kappa\in\mathbb{R}\,\}=\{\,2\kappa\cdot(-3,-3,-3)\mid\kappa\in\mathbb{R}\,\}=\operatorname{Vect}\{\,(1,1,1)\,\}$.

Exercice 3.51 *DM novembre 2013*

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ des polynômes de dégrée au plus 3 à coefficients réels. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}_3[x]$ défini par
$$
E=\left\{\,(a-b)+bx+4cx^2-cx^3\;\middle|\;a,b,c\in\mathbb{R}\,\right\}.
$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Donner une base $\mathcal{E}$ de E.
3. Est-ce que $E=\mathbb{R}_3[x]$? Justifier la réponse.

4. Calculer $\operatorname{coord}(p, \mathcal{E})$ où $p(x) = 2 - x + 4x^2 - x^3$.
5. Compléter la famille $\mathcal{E}$ pour obtenir une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.
6. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Écrire les matrices de changement de base $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$.
7. Calculer $\operatorname{coord}(p, \mathcal{B})$ et $\operatorname{coord}(p, \mathcal{C})$. Quel lien existe-t-il avec les matrices $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$?

Correction.

1. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ car
$$\begin{aligned} E &= \left\{ (a-b) + bx + 4cx^2 - cx^3 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a + b(-1+x) + c(4x^2 - x^3) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ 1, x-1, 4x^2 - x^3 \right\}. \end{aligned}$$
2. Les trois polynômes $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x - 1$ et $g_3(x) = 4x^2 - x^3$ constituent une famille génératrice de E. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre :
$$\begin{aligned} a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + a_3g_3(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} &\iff a_1 + a_2(-1+x) + a_3(4x^2 - x^3) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff (a_1 - a_2) + a_2x + 4a_3x^2 - a_3x^3 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} a_1 - a_2 = 0, \\ a_2 = 0, \\ 4a_3 = 0, \\ -a_3 = 0, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$
donc la famille est libre et est une base de E qu'on note $\mathcal{E}$.
3. Comme $\operatorname{card}(\mathcal{E}) = 3$, alors $\dim(E) = 3 < \dim(\mathbb{R}_3[x])$ donc $E \neq \mathbb{R}_3[x]$.
4. On cherche $(a_1, a_2, a_3) = \operatorname{coord}(p, \mathcal{E})$, c'est-à-dire l'unique triplet (a_1, a_2, a_3) tel que $a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + a_3g_3(x) = 2 - x + 4x^2 - x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} &a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + a_3g_3(x) = 2 - x + 4x^2 - x^3 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff a_1 + a_2(-1+x) + a_3(4x^2 - x^3) = 2 - x + 4x^2 - x^3 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff (a_1 - a_2) + a_2x + 4a_3x^2 - a_3x^3 = 2 - x + 4x^2 - x^3 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} a_1 - a_2 = 2, \\ a_2 = -1, \\ 4a_3 = 4, \\ -a_3 = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = -1, \\ a_3 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$
On conclut que $\operatorname{coord}(p, \mathcal{E}) = (1, -1, 1)$.
5. Les trois polynômes $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x - 1$, $g_3(x) = 4x^2 - x^3$ et $g_4(x) = x^3$ constituent une famille de cardinal égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$. On vérifie s'il s'agit d'une famille libre :
$$\begin{aligned} a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + a_3g_3(x) + a_4g_4(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} &\iff a_1 + a_2(-1+x) + a_3(4x^2 - x^3) + a_4x^3 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff (a_1 - a_2) + a_2x + 4a_3x^2 + (a_4 - a_3)x^3 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} a_1 - a_2 = 0, \\ a_2 = 0, \\ 4a_3 = 0, \\ a_4 - a_3 = 0, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ a_4 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$
donc la famille est libre et est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ qu'on note $\mathcal{B}$.

6. La base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est la famille $\mathcal{C} = \left\{ c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2, c_3(x) = x^3 \right\}$. Pour écrire $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$, on écrit d'abord $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on calcule son inverse :
$$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}^{-1}$:
$$(\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}|\mathbb{I}_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_3/4]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3/4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{array}\right) = (\mathbb{I}_4|\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}})$$
En effet, on a
$$\begin{cases} g_1(x) = c_0(x), \\ g_2(x) = c_1(x) - c_0(x), \\ g_3(x) = 4c_2(x) - c_3(x), \\ g_4(x) = c_3(x), \end{cases} \iff \begin{cases} c_0(x) = g_1(x), \\ c_1(x) = g_1(x) + g_2(x), \\ c_2(x) = g_3(x)/4 + g_4(x)/4, \\ c_3(x) = g_4(x). \end{cases}$$

7. $\operatorname{coord}(p, \mathcal{B}) = (1, -1, 1, 0)$ et $\operatorname{coord}(p, \mathcal{C}) = (2, -1, 4, -1)$ et l'on a
$$\operatorname{coord}(p, \mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} \operatorname{coord}(p, \mathcal{C}) \quad \textit{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{coord}(p, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} \operatorname{coord}(p, \mathcal{B}) \quad \textit{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.52 *CT janvier 2014*

Soit $\mathbb{R}_3[t]$ l'espace des polynômes de degré au plus 3 et considérons l'ensemble
$$V = \{ p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) + p(2) = 0, \; p(1) = 3p(-1) \}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.
2. Déterminer une base et la dimension de V.
3. Montrer que le polynôme $p(t) = 2 + 2t - t^3$ est dans V et trouver les composantes de p dans la base de V calculée auparavant.

Correction.

1. On montre que $V = \operatorname{Vect}\left\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p \right\}$ où $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}_3[t]$. En effet
$$\begin{aligned} V &= \{ p \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) + p(2) = 0, \; p(1) = 3p(-1) \} \\ &= \left\{ a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t] \;\middle|\; 2a + 2b + 4c + 8d = 0 \text{ et } a + b + c + d = 3a - 3b + 3c - 3d \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{5}{3}c - 2d\right) + \left(-\frac{1}{3}c - 2d\right) t + ct^2 + dt^3 \;\middle|\; c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}t + t^2\right) c + \left(-2 - 2t + t^3\right) d \;\middle|\; c, d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Vect}\left\{ q_1(t) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}t + t^2; q_2(t) = -2 - 2t + t^3 \right\}.$$

Par conséquent V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[t]$.

2. La famille $\mathcal{V} = \{ q_1, q_2 \}$ est génératrice de l'espace vectoriel V. De plus,

$$\alpha q_1 + \beta q_2 = 0_{\mathbb{R}_3[t]} \iff \alpha q_1(t) + \beta q_2(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \iff \alpha = \beta = 0$$

donc elle est aussi libre donc elle est une base de V et $\dim(V) = 2$.

3. Si $p(t) = 2 + 2t - t^3$ on a $p(0) + p(2) = \big(2\big) + \big(2 + 4 - 8\big) = 0$ et $p(1) - 3p(-1) = \big(2 + 2 - 1\big) - 3\big(2 - 2 + 1\big) = 0$ donc $p \in V$ et $\operatorname{coord}(p, \mathcal{V}) = (0, -1)$.

Exercice 3.53 *CT Janvier 2012*

Soit

▷ $V = \mathbb{R}_4[t]$ l'espace des polynômes $p(t)$ de degré au plus 4,

▷ $W = \{ p \in V \mid p(1) = 0 \}$,

▷ $U = \operatorname{Vect}\{ 1 + t^2 - t^3, t + t^3, t^2, 1 + t + t^2 \}$.

1. Déterminer une base de W,
2. déterminer une base de U,
3. déterminer un supplémentaire de U dans V,
4. trouver une base de $U \cap W$.
5. Est-il vrai que $U + W = V$? Justifier la réponse.

Correction. Rappelons tout d'abord que $\dim(V) = 5$.

1. On a

$$\begin{aligned} W &= \{ p \in V \mid p(1) = 0 \} \\ &= \left\{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R}, p(1) = 0 \right\} \\ &= \left\{ p(t) = a_1(t-1) + a_2(t^2-1) + a_3(t^3-1) + a_4(t^4-1) \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\big(\{ w_1(t) = t - 1, w_2(t) = t^2 - 1, w_3(t) = t^3 - 1, w_4(t) = t^4 - 1 \}\big). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \alpha w_1(t) + \beta w_2(t) + \gamma w_3(t) + \delta w_4(t) = 0 &\iff (-\alpha - \beta - \gamma - \delta) + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 = 0 \\ &\iff \begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma - \delta = 0, \\ \alpha = 0, \\ \beta = 0, \\ \gamma = 0, \\ \delta = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

la famille $\{ w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t) \}$ est libre ; puisqu'elle est génératrice de W, elle constitue une base de W et $\dim(W) = 4$.

2. La famille $\{ u_1(t) = 1 + t^2 - t^3, u_2(t) = t + t^3, u_3(t) = t^2, u_4(t) = 1 + t + t^2 \}$ n'est pas libre car $u_1(t) + u_2(t) = u_4(t)$. Considérons alors la famille $\{ u_1(t), u_2(t), u_3(t) \}$; elle est une famille génératrice de U et pour qu'elle en soit une base il faut vérifier si elle est libre :

$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) + \gamma u_3(t) = 0 \iff \alpha + \beta t + (\alpha + \gamma)t^2 + (-\alpha + \beta)t^3 = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0, \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

On conclut que la famille $\{ u_1(t) = 1 + t^2 - t^3, u_2(t) = t + t^3, u_3(t) = t^2 \}$ constitue une base de U et $\dim(U) = 3$.

3. La base canonique de V est $\{\, v_0(t)=1, v_1(t)=t, v_2(t)=t^2, v_3(t)=t^3, v_4(t)=t^4 \,\}$ et l'on a

$$\begin{cases} u_1(t)=v_0(t)+v_2(t)-v_3(t),\\ u_2(t)=v_1(t)+v_3(t),\\ u_3(t)=v_2(t), \end{cases} \iff \begin{cases} v_0(t)=-v_1(t)+u_1(t)+u_2(t)-u_3(t),\\ v_2(t)=u_3(t),\\ v_3(t)=u_2(t)-v_1(t), \end{cases}$$

donc une autre base de V est la famille $\{\, v_1(t), v_4(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \,\}$. On peut alors conclure qu'une base d'un supplémentaire de U dans V est l'ensemble $\{\, v_1(t), v_4(t) \,\}$.

4. On a

$$\begin{aligned} U\cap W &= \left\{\, u(t)=\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)+\gamma u_3(t) \;\middle|\; u(1)=0, (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \,\right\}\\ &= \left\{\, u(t)=\alpha+\beta t+(\alpha+\gamma)t^2+(-\alpha+\beta)t^3 \;\middle|\; u(1)=0, (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \,\right\}\\ &= \left\{\, u(t)=\alpha+\beta t-2\beta t^2+(-\alpha+\beta)t^3 \;\middle|\; (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \,\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\left\{\, 1-t^3, t-2t^2+t^3 \,\right\}\right). \end{aligned}$$

Comme la famille $\left\{\, 1-t^3, t-2t^2+t^3 \,\right\}$ est libre, elle constitue une base de $U\cap W$ et $\dim(U\cap W)=2$.

5. Il est vrai que $U+W=V$ car $U+W$ est un sous-espace vectoriel de V et $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)=3+4-2=5$.

Exercice 3.54 *CC Novembre 2012*

Montrer que les matrices

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix} \qquad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix} \qquad \mathbb{C}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}$$

forment un base de l'espace vectoriel M des matrices symétriques d'ordre 2. Décomposer sur cette base la matrice

$$\mathbb{G}=\begin{pmatrix}5&6\\6&7\end{pmatrix}.$$

Correction. La famille $\mathcal{F}=\{\,\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}\,\}$ est une base de l'espace vectoriel

$$M=\left\{\,\mathbb{M}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathbb{M}=\mathbb{M}^T \,\right\}=\left\{\, \left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a,b,c\in\mathbb{R} \,\right\}$$

car

(i) $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}\in M$,
(ii) $\mathrm{card}(\mathcal{F})=\dim(M)$,
(iii) $\mathcal{F}$ est libre car la combinaison linéaire $\lambda_1\mathbb{A}+\lambda_2\mathbb{B}+\lambda_3\mathbb{C}=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 & -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3\\ -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0,\\ -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0,\\ -2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3=0,\end{cases} \iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $\mathrm{coord}(\mathbb{G},\mathcal{F})$ les coordonnées de la matrice $\mathbb{G}$ dans la base $\mathcal{F}$, *i.e.* les uniques $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\mathbb{A}+\lambda_2\mathbb{B}+\lambda_3\mathbb{C}=\mathbb{G}$:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1&1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\6&7\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3&-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3\\-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3&\lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\6&7\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=5,\\-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=6,\\-2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=6,\\\lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3=7,\end{cases}\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\6\\7\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&3&3\\1&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\16\\2\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&5&1\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\16\\-14\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37/5\\34/15\\14/3\end{pmatrix}=\operatorname{coord}(\mathbb{G},\mathcal{F}).$$

Exercice 3.55 *CC Novembre 2012*

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$W=\left\{\,(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=u=z+t-2x=0\,\right\}.$$

Soit ensuite V l'ensemble

$$V=\left\{\,(a+d,0,a+b,a-b,c+d)\in\mathbb{R}^5 \;\middle|\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\,\right\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
2. Calculer la dimension et donner une base des espaces vectoriels suivants :

$$V,\quad W,\quad V+W,\quad V\cap W.$$

Correction.

1. On montre que $V=\operatorname{Vect}\left\{\,\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p\,\right\}$ où $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}^5$. En effet

$$\begin{aligned}V&=\left\{\,(a+d,0,a+b,a-b,c+d)\in\mathbb{R}^5 \;\middle|\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\,\right\}\\&=\{\,a(1,0,1,1,0)+b(0,0,1,-1,0)+c(0,0,0,0,1)+d(1,0,0,0,1)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\,\}\\&=\operatorname{Vect}(\{\,(1,0,1,1,0),(0,0,1,-1,0),(0,0,0,0,1),(1,0,0,0,1)\,\})\end{aligned}$$

2. $\boxed{V}$ La famille $\mathcal{V}=\{\,(1,0,1,1,0),(0,0,1,-1,0),(0,0,0,0,1),(1,0,0,0,1)\,\}$ est génératrice de V. De plus

$$a(1,0,1,1,0)+b(0,0,1,-1,0)+c(0,0,0,0,1)+d(1,0,0,0,1)=(0,0,0,0,0)$$
$$\iff\begin{cases}a+d=0,\\0=0,\\a+b=0,\\a-b=0,\\c+d=0,\end{cases}\iff a=b=c=d=0$$

donc la famille $\mathcal{V}$ est une base de V et $\dim(V)=\operatorname{card}(\mathcal{V})=4$.

$\boxed{W}$ On cherche une famille $\mathcal{W}$ génératrice de W :

$$\begin{aligned}W&=\left\{\,(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y=u=z+t-2x=0\,\right\}.\\&=\{\,(x,0,z,2x-z,0)\mid x,z\in\mathbb{R}\,\}.\\&=\operatorname{Vect}(\{\,(1,0,0,2,0),(0,0,1,-1,0)\,\})\end{aligned}$$

donc la famille $\mathcal{W}=\{\,(1,0,0,2,0),(0,0,1,-1,0)\,\}$ est génératrice de W. De plus

$$a(1,0,0,2,0)+b(0,0,1,-1,0)=(0,0,0,0,0)\iff\begin{cases}a=0,\\0=0,\\b=0,\\2a-b=0,\\0=0\end{cases}\iff a=b=0$$

donc la famille $\mathcal{W}$ est une base de W et $\dim(W)=\operatorname{card}(\mathcal{W})=2$.

$\boxed{V+W}$ On appelle SOMME de V et W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^5$ qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de V et d'un vecteur de W :

$$\mathbf{u} \in V+W \qquad \iff \qquad \exists \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W,\ \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

La somme de deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.
Une famille génératrice de $V+W$ est donc la famille

$$\mathcal{S} = \mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \{\, (1,0,1,1,0), (0,0,1,-1,0), (0,0,0,0,1), (1,0,0,0,1), (1,0,0,2,0) \,\}$$

Comme $(1,0,1,1,0) - (0,0,1,-1,0) = (1,0,0,2,0)$, la famille $\mathcal{S}$ n'est pas libre. La famille $\mathcal{V} = \mathcal{S} \setminus \{\, (1,0,0,2,0) \,\}$ est alors encore génératrice de $V+W$ et on a déjà prouvé qu'elle est libre, donc elle constitue une base de $V+W$. De plus, $\dim(V+W) = \operatorname{card}(\mathcal{V}) = 4$, autrement dit $V+W=V$.

$\boxed{V \cap W}$ La formule de GRASSMANN lie la dimension de la somme de deux sous espaces vectoriels à celle de l'intersection :

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Donc $4 = 4+2-\dim(V\cap W)$, d'où $\dim(V \cap W) = 2$. En effet, comme $V+W=V$, alors $V \cup W = W$: une base de $V \cap W$ est $\mathcal{W}$.

Exercice 3.56 *CC novembre 2013*

Considérons les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ a\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+y=0,\ z=2x \right\}.$$

1. Déterminer une base et la dimension de U.
2. Déterminer une base et la dimension de V.
3. Déterminer une base et la dimension de $U \cap V$.
4. Déterminer une base et la dimension de $U+V$.

CORRECTION.

1. L'espace vectoriel U est engendré par la famille $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$. On a

$$a\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}0\\a\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \implies a=b=0$$

donc la famille $\mathcal{U}$ est libre. Par conséquent $\mathcal{U}$ est une base de U et $\dim(U) = \operatorname{card}(\mathcal{U}) = 2$.

2. On a

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+y=0,\ z=2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\-x\\2x\\w\end{pmatrix} \,\middle|\, x,w \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, x,w \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

donc l'espace vectoriel V est engendré par la famille $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$. On a

$$a\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}a\\-a\\2a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \implies a=b=0$$

donc la famille $\mathcal{V}$ est libre. Par conséquent $\mathcal{V}$ est une base de V et $\dim(V) = \operatorname{card}(\mathcal{V}) = 2$.

3. Si $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in U \cap V$ alors

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in U &\iff x=0, \quad z=y \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in V &\iff y=-x, \quad z=2x \end{aligned}\right\} \implies x=y=z=0,$$

donc

$$U\cap V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x=y=z=0\right\}=\operatorname{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

L'espace vectoriel $U\cap V$ est engendré par la famille $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ qui est libre. Par conséquent $\mathcal{B}$ est une base de $U\cap V$ et $\dim(U\cap V)=\operatorname{card}(\mathcal{B})=1$.

4. On déduit la dimension de la somme grâce à la formule de GRASSMANN :

$$\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)=2+2-1=3.$$

Une famille génératrice de $U+V$ est donnée par la réunion d'une famille génératrice de U et d'une famille génératrice de V, donc par exemple par la famille

$$\mathcal{S}=\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Comme $\operatorname{card}(\mathcal{S})=\dim(U+V)$, la famille $\mathcal{S}$ est une base de l'espace vectoriel $U+V$.

Exercice 3.57 *CT Janvier 2013*

Considérons les deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-2y+z=0\right\},\qquad V=\operatorname{Vect}(\{(1,0,1),(1,2,1),(1,0,1)\}).$$

1. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel U.
2. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel V.
3. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel $U+V$.
4. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel $U\cap V$.

CORRECTION.

1. $\dim(U)=2$ et une base de U et la famille $\mathcal{U}=\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ car

$$U=\{(2y-z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,0)+z(-1,0,1)\mid y,z\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}(\{(2,1,0),(-1,0,1)\})$$

et

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=2.$$

2. $\dim(V)=2$ et une base de V et la famille $\mathcal{V}=\{(1,0,1),(1,2,1)\}$ car

$$V=\operatorname{Vect}(\{(1,0,1),(1,2,1),(1,0,1)\})=\operatorname{Vect}(\{(1,0,1),(1,2,1)\})$$

et

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\1&1\end{pmatrix}=2.$$

3. On appelle SOMME de U et V l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de V :

$$\mathbf{w}\in U+V\qquad\iff\qquad\exists\mathbf{u}\in U,\ \mathbf{v}\in V,\ \mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$$

La somme de deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Une famille génératrice de $U+V$ est donc la famille

$$\mathcal{S}=\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=\{(2,1,0),(-1,0,1),(1,0,1),(1,2,1)\}$$

Comme $\operatorname{card}(\mathcal{S})>3$, la famille $\mathcal{S}$ n'est pas libre. En effet, $(1,2,1)=2(2,1,0)+2(-1,0,1)-(1,0,1)$. La famille $\mathcal{W}=\mathcal{S}\setminus\{(1,2,1)\}$ est alors encore génératrice de $U+V$. De plus, elle est libre car

$$\det\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=2\quad\textit{i.e.}\quad\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=3$$

donc elle constitue une base de $U+V$. De plus, $\dim(U+V)=\operatorname{card}(\mathcal{W})=3$, autrement dit $U+V=\mathbb{R}^3$.

4. La formule de Grassmann lie la dimension de la somme de deux sous espaces vectoriels à celle de l'intersection :

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V).$$

Donc $\dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$. De plus,

$$\begin{cases} \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in U \iff w_1 = 2w_2 - w_3 \\ \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in V \iff w_1 = w_3 \end{cases} \qquad \text{donc } \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in U \cap V \iff w_1 = w_3 = w_2,$$

ainsi $U \cap V = \operatorname{Vect}\{ (1, 1, 1) \}$.

Exercice 3.58

Considérons les cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

$$E = \operatorname{Vect}(\{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \}), \qquad F = \operatorname{Vect}(\{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}), \qquad G = \operatorname{Vect}(\{ \mathbf{d}, \mathbf{e} \}).$$

1. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Déterminer une base et la dimension de F.
3. Déterminer une base et la dimension de G.
4. Déterminer une base et la dimension de $F + G$.
5. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

Correction.

1. L'espace vectoriel E est engendré par la famille $\mathcal{E} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \}$ qui a cardinal supérieur à la dimension de $\mathbb{R}^4$, donc la famille $\mathcal{E}$ n'est pas libre. On remarque que $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$ et $\mathbf{b} = 2\mathbf{a} - \mathbf{c}$ par conséquent $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{E}')$ avec $\mathcal{E}' = \{ \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{e} \}$. Vérifions si $\mathcal{E}'$ est libre :

$$\alpha\mathbf{a} + \gamma\mathbf{c} + \epsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \implies \begin{pmatrix} 3\alpha + 4\gamma \\ 2\alpha + 2\gamma + 3\epsilon \\ \alpha + 2\gamma + 2\epsilon \\ 4\alpha + \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = \gamma = \epsilon = 0$$

donc la famille $\mathcal{E}'$ est libre. Par conséquent $\mathcal{E}'$ est une base de E et $\dim(E) = \operatorname{card}(\mathcal{E}') = 3$.

2. L'espace vectoriel F est engendré par la famille $\mathcal{F} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}$. On a déjà remarqué que $\mathbf{b} = 2\mathbf{a} - \mathbf{c}$ par conséquent $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{F}')$ avec $\mathcal{F}' = \{ \mathbf{a}, \mathbf{c} \}$. Puisque $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}'$ est une famille libre, alors la famille $\mathcal{F}'$ aussi est libre. Par conséquent $\mathcal{F}'$ est une base de F et $\dim(F) = \operatorname{card}(\mathcal{F}') = 2$.

3. L'espace vectoriel G est engendré par la famille $\mathcal{G} = \{ \mathbf{d}, \mathbf{e} \}$. Vérifions si $\mathcal{G}'$ est libre :

$$\delta\mathbf{d} + \epsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \implies \begin{pmatrix} -\delta \\ 3\epsilon \\ \delta + 2\epsilon \\ 2\delta + \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \delta = \epsilon = 0$$

donc la famille $\mathcal{G}'$ est libre. Par conséquent $\mathcal{G}'$ est une base de G et $\dim(G) = \operatorname{card}(\mathcal{G}') = 2$.

4. Une famille génératrice de $F + G$ est donnée par la réunion d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G, donc par exemple par la famille

$$\mathcal{S} = \mathcal{F}' \cup \mathcal{G} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{c} \} \cup \{ \mathbf{d}, \mathbf{e} \} = \{ \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \}$$

On sait que $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$ donc

$$F + G = \operatorname{Vect}(\mathcal{S}) = \operatorname{Vect}(\{ \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{e} \}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{E}').$$

Donc $F + G = E$ et $\dim(F + G) = \dim(E) = 3$.

5. On déduit la dimension de l'intersection grâce à la formule de Grassmann :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 2+2-3 = 1.$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in F \cap G$, alors

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in F \quad &\iff \quad \exists \alpha, \gamma \text{ tels que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{a} + \gamma \mathbf{c} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in G \quad &\iff \quad \exists \delta, \epsilon \text{ tels que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \delta \mathbf{d} + \epsilon \mathbf{e} \end{aligned}\right\} \implies \exists \alpha, \gamma, \delta, \epsilon \text{ tels que } \alpha \mathbf{a} + \gamma \mathbf{c} = \delta \mathbf{d} + \epsilon \mathbf{e}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ -\delta \\ -\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \gamma = -\delta = -\alpha, \; \epsilon = 0$$

donc

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

L'espace vectoriel $F \cap G$ est engendré par la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ qui est libre. Par conséquent $\mathcal{B}$ est une base de $F \cap G$.

Exercice 3.59 *CT janvier 2014*

Considérons les deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+z=0 \right\}, \qquad V = \operatorname{Vect}(\{ (1,-1,0); (1,1,-1) \}).$$

1. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel U.
2. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel V.
3. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel $U+V$.
4. Calculer la dimension et donner une base de l'espace vectoriel $U \cap V$.

Correction.

1. $\dim(U) = 2$ et une base de U et la famille $\mathcal{U} = \{ (1,0,-1), (0,1,0) \}$ car

$$U = \{ (x,y,-x) \mid x,y \in \mathbb{R} \} = \{ x(1,0,-1) + y(0,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Vect}(\{ (1,0,-1); (0,1,0) \})$$

et

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,0) = (0,0,0) \qquad \implies \qquad \alpha = \beta = 0.$$

2. $\dim(V) = 2$ et une base de V et la famille $\mathcal{V} = \{ (1,-1,0); (1,1,-1) \}$ car

$$\alpha(1,-1,0) + \beta(1,1,-1) = (0,0,0) \qquad \implies \qquad \alpha = \beta = 0.$$

3. On appelle somme de U et V l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de V :

$$\mathbf{w} \in U+V \qquad \iff \qquad \exists \mathbf{u} \in U \text{ et } \mathbf{v} \in V \text{ tels que } \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

La somme de deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Une famille génératrice de $U+V$ est donc la famille

$$\mathcal{S} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} = \{ (1,0,-1), (0,1,0), (1,-1,0), (1,1,-1) \}$$

Comme $\operatorname{card}(\mathcal{S}) > 3$, la famille $\mathcal{S}$ n'est pas libre. En effet, $(1,1,-1) = (1,0,-1) + (0,1,0)$. La famille $\mathcal{W} = \mathcal{S} \setminus \{ (1,1,-1) \}$ est alors encore génératrice de $U+V$. De plus, elle est libre car

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,-1,0) = (0,0,0) \qquad \implies \qquad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc elle constitue une base de $U+V$. De plus, $\dim(U+V) = \operatorname{card}(\mathcal{W}) = 3$, autrement dit $U+V = \mathbb{R}^3$.

4. La formule de GRASSMANN lie la dimension de la somme de deux sous espaces vectoriels à celle de l'intersection :
$$\dim(U\cap V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V).$$
Donc $\dim(U\cap V)=2+2-3=1$. De plus,[1]
$$\begin{cases}\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)\in U \iff w_1=-w_3\\ \mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)\in V \iff w_1=-w_2-2w_3\end{cases}\qquad\text{donc } \mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)\in U\cap V \iff w_1=-w_3=-w_2-2w_3,$$
ainsi $U\cap V=\operatorname{Vect}\{\,(1,3,-1)\,\}$.

Exercice 3.60 *CC Novembre 2012*

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par
$$V=\left\{\,(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x-2y+z=0, y-2t=0\,\right\}.$$

1. Déterminer une base de V.
2. Déterminer une base du supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer les composantes du vecteur $\mathbf{u}=(0,1,1,0)$ dans la base du supplémentaire de V calculée au point précédent.

CORRECTION.

1. On cherche d'abord une famille génératrice de V :
$$\begin{aligned}V&=\left\{\,(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x-2y+z=0, y-2t=0\,\right\}\\ &=\{\,(x,2t,4t-x,t)\mid x,t\in\mathbb{R}\,\}\\ &=\{\,x(1,0,-1,0)+t(0,2,4,1)\mid x,t\in\mathbb{R}\,\}\\ &=\operatorname{Vect}(\{\,(1,0,-1,0),(0,2,4,1)\,\})\end{aligned}$$
La famille $\mathcal{V}=\{\,\mathbf{v}_1=(1,0,-1,0),\mathbf{v}_2=(0,2,4,1)\,\}$ est génératrice de V. De plus
$$x(1,0,-1,0)+t(0,2,4,1)=(0,0,0,0)\iff\begin{cases}x=0,\\2t=0,\\4t-x=0,\\t=0,\end{cases}\iff x=t=0,$$
la famille $\mathcal{V}$ est donc libre et constitue une base de l'espace vectoriel V.
2. La base canonique de R^4 est $\{\,\mathbf{e}_1=(1,0,0,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0,0),\mathbf{e}_3=(0,0,1,0),\mathbf{e}_4=(0,0,0,1)\,\}$ et l'on a
$$\begin{cases}\mathbf{v}_1=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{v}_2=2\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\end{cases}\iff\begin{cases}\mathbf{e}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_4=\mathbf{v}_2-2\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3,\end{cases}$$
donc une autre base de $\mathbb{R}^4$ est la famille $\{\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\,\}$. On peut alors conclure qu'une base d'un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^4$ est la famille $\mathcal{S}=\{\,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\,\}$.
3. Les composantes $\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{S})$ du vecteur $\mathbf{u}=(0,1,1,0)$ dans la base du supplémentaire de V calculée au point précédent sont $(1,1)$.

Exercice 3.61

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés par
$$F=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=-y\,\right\}\qquad G=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y-2z=0\,\right\}.$$

1. $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)\in V \iff \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\begin{cases}w_1=\alpha+\beta\\w_2=-\alpha+\beta\\w_3=-\beta\end{cases}\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}w_1=\alpha-w_3\\w_2=-\alpha-w_3\end{cases}\iff w_1+w_2=-2w_3$

Sont-ils en somme directe ?

Correction. Soit $\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) \in F \cap G$, alors

$$\left.\begin{array}{lcc} \left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) \in F & \iff & x+y=0 \\ \left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) \in G & \iff & x+y-2z=0 \end{array}\right\} \iff \begin{cases} y=-x\\ z=0\end{cases}$$

donc

$$F\cap G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x\\ -x\\ 0\end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; x\in\mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{smallmatrix}\right) \right\}\right).$$

L'espace vectoriel $F\cap G$ est engendré par la famille $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{smallmatrix}\right) \right\}$ donc ils ne sont pas en somme directe.

Exercice 3.62

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$F = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=-y \right\} \qquad G = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=0, y-z=0 \right\}.$$

Sont-ils en somme directe ?

Correction. Soit $\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) \in F \cap G$, alors

$$\left.\begin{array}{lcc} \left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) \in F & \iff & x+y=0 \\ \left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) \in G & \iff & x=0, y-z=0 \end{array}\right\} \iff \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

donc

$$F\cap G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{smallmatrix}\right) \right\}$$

par conséquent ils sont en somme directe.

Exercice 3.63

Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que

$$B\subset C, \qquad A\cap B = A\cap C, \qquad A+B=A+C.$$

Montrer que $B=C$.

Correction. En utilisant la formule de Grassmann on a

$$\begin{cases} \dim(A\cap B)+\dim(A+B) = \dim(A)+\dim(B),\\ \dim(A\cap C)+\dim(A+C) = \dim(A)+\dim(C),\end{cases} \overset{\substack{A\cap B=A\cap C\\ A+B=A+C}}{\Longrightarrow} \dim(B)=\dim(C).$$

Puisque $B\subset C$, on conclut que $B=C$.

Exercice 3.64 *CT Janvier 2013*

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

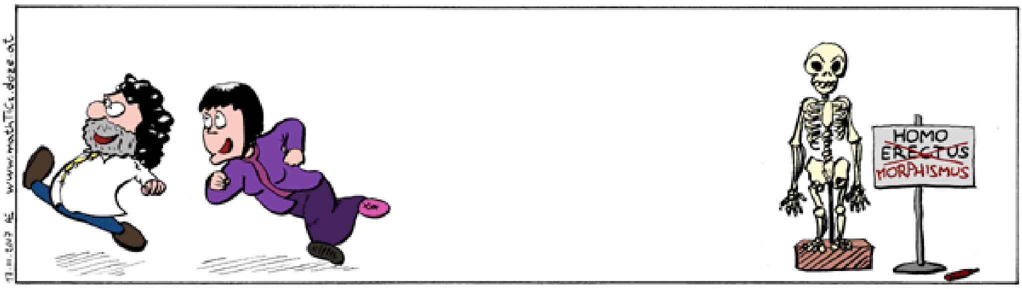
$$V = \left\{ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; x-y+2z-2t=0, 3x-y+2z=0 \right\}.$$

1. Déterminer une base de V.

2. Compléter cette base de V en un base de $\mathbb{R}^4$. On appellera cette base $\mathcal{B}_4$.
3. Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_4$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Correction.

1. On cherche d'abord une famille génératrice de V :
$$\begin{aligned}V &= \left\{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + 2z - 2t = 0, 3x - y + 2z = 0 \,\right\}\\ &= \{\, (x, 3x + 2z, z, -x) \mid x, z \in \mathbb{R} \,\}\\ &= \{\, x(1, 3, 0, -1) + z(0, 2, 1, 0) \mid x, z \in \mathbb{R} \,\}\\ &= \operatorname{Vect}(\{\, (1, 3, 0, -1), (0, 2, 1, 0) \,\}).\end{aligned}$$
La famille $\mathcal{V} = \{\, \mathbf{v}_1 = (1, 3, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (0, 2, 1, 0) \,\}$ est génératrice de V. De plus
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = 2,$$
la famille $\mathcal{V}$ est donc libre et constitue une base de l'espace vectoriel V.
2. La famille $\mathcal{B}_4 = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0) \,\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ car elle a cardinal 4 et de plus
$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \neq 0, \quad \textit{i.e.} \quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 4$$
donc elle est libre.
3. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1) \,\}$. Pour écrire $\mathbb{P}_{\mathcal{B}_4 \to \mathcal{C}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_4$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on écrit d'abord $\mathbb{P}_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}_4}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}_4$ et on calcul son inverse :
$$\mathbb{P}_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}_4 \to \mathcal{C}} = \mathbb{P}^{-1}_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}_4}$:
$$\begin{aligned}(\mathbb{P}_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}_4} | \mathbb{I}_4) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1\\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ L_3 \leftarrow L_3\\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc}\boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \boxed{0} & 2 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1\\ L_2 \leftarrow L_2/2\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2/2\\ L_4 \leftarrow L_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{1} & -3/2 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{0} & 3/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3/3\\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3\\ L_3 \leftarrow 2L_3/3\\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3/3}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \boxed{0} & 1/3 & 0 & 1/3 & -2/3 & 0\\ 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1/3 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 \leftarrow L_2\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2/2\\ L_4 \leftarrow 3L_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -2 & 3\end{array}\right) = (\mathbb{I}_4 | \mathbb{P}_{\mathcal{B}_4 \to \mathcal{C}})\end{aligned}$$



4 Applications linéaires

Rappels : relation, fonction, application

Définition

Soient E et F deux ensembles.

▷ Le PRODUIT CARTÉSIEN $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F. L'égalité dans $E \times F$ est définie par : $(x, y) = (x', y') \iff x = x'$ et $y = y'$.

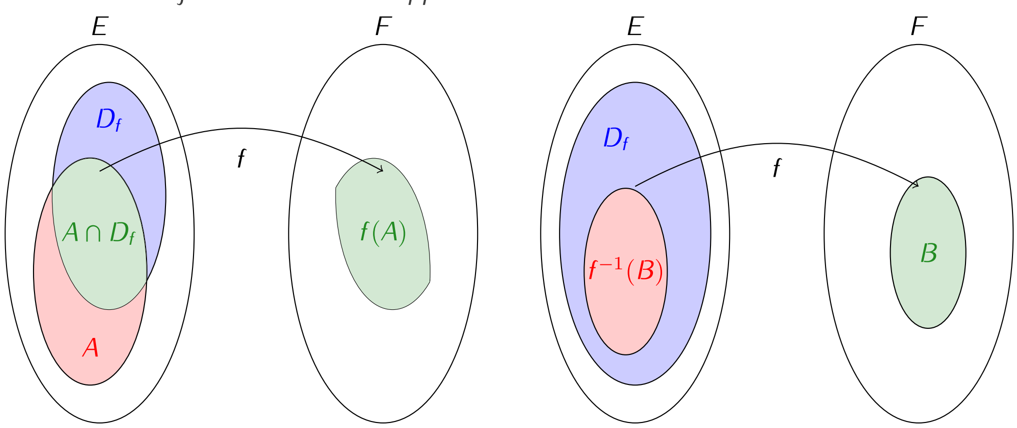
▷ Une RELATION BINAIRE (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathcal{R} = (E, F, G)$ où G une partie de $E \times F$. L'ensemble E est appelé *ensemble de départ de* $\mathcal{R}$, l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée de* $\mathcal{R}$. L'ensemble G est appelé *graphe* de $\mathcal{R}$.
NOTATION. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on écrit "$x\mathcal{R}y$" et on dit "x est en relation avec y" ssi "$(x, y) \in G$".

▷ Une FONCTION f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x \in E$, il existe au plus un élément $y \in F$ satisfaisant xfy.

▷ Le DOMAINE DE DÉFINITION D_f d'une fonction f de E dans F est l'ensemble des $x \in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y \in F$ tel que xfy.
NOTATION. Pour tout $x \in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y \in F$ satisfaisant xfy. Donc pour tout $(x, y) \in D_f \times F$, $xfy \iff y = f(x)$. Si $x \in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x par f". Si $y \in F$ alors tout point $x \in D_f$ satisfaisant $y = f(x)$ est appelé "un antécédent de x par f".

▷ Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E. L'IMAGE DIRECTE de A par f est la partie de F définie par $f(A) := \{\, y \in F \;:\; \exists x \in A \cap D_f \quad y = f(x) \,\}$.

▷ Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F. L'IMAGE RÉCIPROQUE de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B) := \{\, x \in D_f \;:\; f(x) \in B \,\}$.
Attention à ne pas confondre l'image réciproque de B, qui existe toujours, avec l'image de B par f^{-1}, qui n'existe que si f est une bijection. Ici on ne suppose rien sur f.



▷ Une APPLICATION f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E.

▷ Une INJECTION f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall (x, x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Attention à ne pas confondre :

▷ *la définition d'une application qui s'écrit*

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x = x' \implies f(x) = f(x'),\\ &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) \neq f(x') \implies x \neq x', \end{aligned}$$

▷ *la définition d'application injective qui s'écrit*

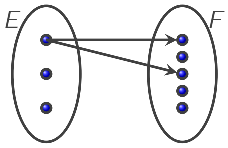
$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),\\ &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'. \end{aligned}$$

▷ Une SURJECTION f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

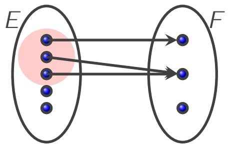
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

▷ Une BIJECTION f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

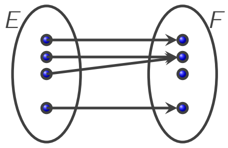
Exemple

1. 

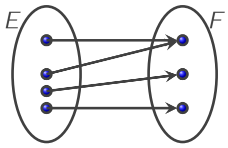
Elle n'est pas une fonction.

2. 

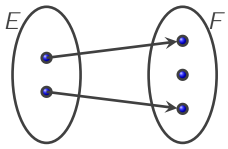
Elle est une fonction mais elle n'est pas une application.

3. 

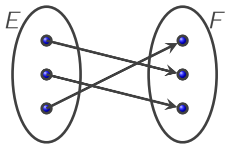
Elle est une application ni injective ni surjective.

4. 

Elle est une application surjective non injective.

5. 

Elle est une application injective non surjective.

6. 

Elle est une bijection.

Astuce *Les droites*

Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors

▷ Une relation de E dans F est une fonction si toute droite vertical d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f au plus une fois.

▷ Une fonction $f : E \to F$ est une application si toute droite vertical d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f une fois et une seule.

▷ Une application $f : E \to F$ est une application injective si toute droite horizontale d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f au plus une fois.

▷ Une application $f : E \to F$ est une application surjective si toute droite horizontale d'équation $y = k \in F$

intersecte le graphe de f au moins une fois.
▷ Une application $f\colon E \to F$ est une application bijective si toute droite horizontale d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f exactement une fois.

Définitions

Définition *Application linéaire*

Soit E, F deux espaces vectoriels. Une APPLICATION $f\colon E \to F$ est dite LINÉAIRE (ou HOMOMORPHISME) de E vers F si
▷ $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$,
▷ $f(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot f(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbb{K}$,
ou, de manière équivalente,
▷ $f(\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot f(\mathbf{u}) + \beta \cdot f(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Exemple

Soit les applications :

① $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2y-z, x+z)$;
② $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (0, 2y-z, 0)$;
③ $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+3, 2y-z, x+z)$;
④ $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2yz, x+z)$;
⑤ $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x+2y+3z$;
⑥ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2+2x$.

On veut trouver celles qui sont linéaires :

① f est une application linéaire car pour tout (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned}&f(ax+bx', ay+by', az+bz')\\ &\quad= (ax+bx'+2(ay+by')+3(az+bz'), 2(ay+by')-(az+bz'), ax+bx'+(az+bz'))\\ &\quad= a(x+2y+3z, 2y-z, x+z) + b(x'+2y'+3z', 2y'-z', x'+z') = af(x,y,z)+bf(x',y',z');\end{aligned}$$

② f est une application linéaire car pour tout (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned}f(ax+bx', ay+by', az+bz') &= (0, 2(ay+by')-(az+bz'), 0)\\ &= a(0,2y-z,0)+b(0,2y'-z',0) = af(x,y,z)+bf(x',y',z');\end{aligned}$$

③ f n'est pas une application linéaire car par exemple $f(0,0,0) = (3,0,0)$;

④ f n'est pas une application linéaire car pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{ (0,0,0) \}$ et pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0; 1 \}$ on a
$$\begin{aligned}f(ax,ay,az) &= (ax+2ay+3az, 2a^2yz, ax+az)\\ &\nparallel\\ af(x,y,z) &= (ax+2ay+3az, 2ayz, ax+az);\end{aligned}$$

⑤ f est une application linéaire car pour tout (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned}&f(ax+bx', ay+by', az+bz')\\ &\quad= ax+bx'+2(ay+by')+3(az+bz')\\ &\quad= a(x+2y+3z)+b(x'+2y'+3z') = af(x,y,z)+bf(x',y',z');\end{aligned}$$

⑥ f n'est pas une application linéaire car par exemple $f(2) = 8 \neq 2f(1) = 3$.

Définition

Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire.
▷ Si $f\colon E \to F$ est bijective, on dit que f est un ISOMORPHISME de E sur F.
▷ Si $F = E$, on dit que $f\colon E \to E$ est un ENDOMORPHISME de E.
▷ Si $F = E$ et $f\colon E \to E$ est bijective, on dit que f est un AUTOMORPHISME de E.
▷ Si $F = \mathbb{R}$, on dit que $f\colon E \to \mathbb{R}$ est une FORME LINÉAIRE.

▷ *Pour prouver qu'une application $f\colon E \to F$ est linéaire on utilise la définition.*
▷ *Si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un isomorphisme il suffit de prouver qu'elle est bijective ;*
▷ *si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un endomorphisme il suffit de prouver que $f(E) \subset E$;*
▷ *si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un automorphisme il suffit de prouver qu'elle est bijective et que $f(E) \subset E$.*

Exemple
L'application nulle

$$\begin{aligned} f\colon E &\to F \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{0}_F \end{aligned}$$

est linéaire. En effet :
- ▷ $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{0}_F$ et $f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_F+\mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F$ pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in E$;
- ▷ $f(\alpha\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F$ et $\alpha\cdot f(\mathbf{u}) = \alpha\cdot\mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F$ pour tout $\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple
L'application identique

$$\begin{aligned} f\colon E &\to E \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} \end{aligned}$$

est linéaire. En effet :
- ▷ $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in E$;
- ▷ $f(\alpha\cdot\mathbf{u}) = \alpha\cdot\mathbf{u} = \alpha\cdot f(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

C'est d'ailleurs un automorphisme de E.

Exemple
Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto ax$ (à ne pas confondre avec les applications affines).

Exemple
Les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$.

Exemple
Les changements de base sont des automorphismes.

Définition
- ▷ L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathrm{Hom}(E, F)$;
- ▷ l'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$;
- ▷ L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$;
- ▷ L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{Aut}(E)$.

Propriété
❶ Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. L'image du vecteur nul est le vecteur nul : $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

❷ Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. L'image de l'opposé est l'opposé de l'image : $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u} \in E$.

❸ Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : $f(\sum_{i=1}^p \alpha_i\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(\mathbf{u}_i)$ pour tout $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p \in E$.

❹ La composée de deux applications linéaires $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G) \implies g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

❺ La somme de deux applications linéaires est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F) \implies f + g \in \mathcal{L}(E, F)$.

❻ Le produit par un scalaire de deux applications linéaires est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in \mathcal{L}(E, F)$.

❼ Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme : $f \in \mathrm{Isom}(E, F) \implies f^{-1} \in \mathrm{Isom}(E, F)$.

❽ La composée de deux isomorphismes $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ est un isomorphisme : $f \in \mathrm{Isom}(E, F)$ et $g \in \mathrm{Isom}(F, G) \implies g \circ f \in \mathrm{Isom}(E, G)$.

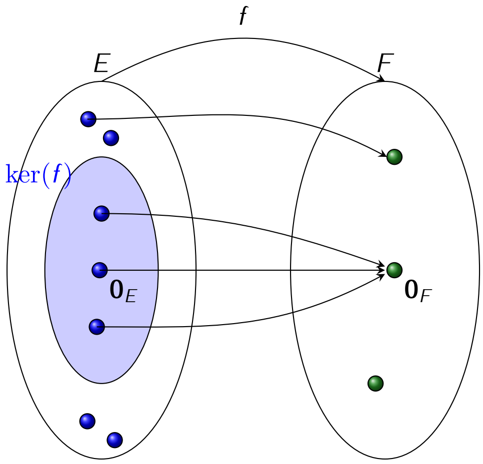
Noyau, image et rang d'une applications linéaire

Définition *Noyau, image, rang*

- ▷ On appelle NOYAU d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $\mathbf{u} \in E$ tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F$. Le noyau est noté $\ker(f)$. On a donc

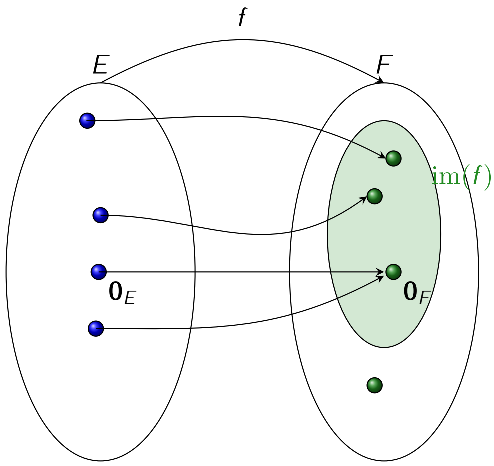
$$\ker(f) = \{\, \mathbf{u} \in E \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F \,\}.$$

La détermination du $\ker(f)$ conduit donc naturellement à la résolution d'un système linéaire homogène.



- ▷ On appelle IMAGE d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $\mathbf{v} \in F$ tels qu'il existe $\mathbf{u} \in E$ vérifiant $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. L'image est notée $\mathrm{im}(f)$. On a donc

$$\mathrm{im}(f) = \{\, \mathbf{v} \in F \mid \exists\, \mathbf{u} \in E,\ \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \,\}.$$



- ▷ On appelle RANG d'une application linéaire f de E vers F la dimension de l'image de f. On le note $\mathrm{rg}(f)$. On a donc

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}(f)).$$

Proposition

- ▷ $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E.
- ▷ $\mathrm{im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F.

Proposition

- ▷ f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$.
- ▷ f est surjective si et seulement si $\mathrm{im}(f) = F$.
- ▷ f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$ et $\mathrm{im}(f) = F$.

Proposition

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F.

❶ L'image d'une base de E est une famille génératrice de $\mathrm{im}(F)$.

❷ L'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F si et seulement si f est surjective.

❸ L'image d'une famille libre de E est une famille libre de F si et seulement si f est injective.

❹ L'image d'une base de E est une base de F si et seulement si f est bijective.

❺ S'il existe un isomorphisme de E vers F alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème *du rang ou des dimensions*

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F.

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Proposition

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F.
Si $\dim(E) = \dim(F)$, il y a équivalence entre :

- ▷ $f \in \mathrm{Isom}(E, F)$,
- ▷ $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$,
- ▷ $\mathrm{im}(f) = F$, i.e. $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Cas particulier : si $E = F$, il y a équivalence entre :

- ▷ $f \in \mathrm{Aut}(E)$,
- ▷ $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$,
- ▷ $\mathrm{im}(f) = E$.

Matrices et applications linéaires

Définition *Matrice représentative d'une application linéaire*

Soit

- ▷ E et F deux espaces vectoriels,
- ▷ $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \}$ une base de E,
- ▷ $\mathcal{C} = \{ \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m \}$ une base de F,
- ▷ $f\colon E \to F$ une application linéaire de E dans F.

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F la matrice $m \times n$ dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de $f(\mathbf{e}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$
$f(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{e}'_1 + \dots + a_{ij}\mathbf{e}'_i + \dots + a_{mj}\mathbf{e}'_m$

On voit tout de suite que la matrice d'une application linéaire ne sera pas la même suivant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs de $\mathcal{B}$ et l'ordre dans lequel on prend les vecteurs de $\mathcal{C}$.

Exemple

Si $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1 = (1,0,0), \mathbf{b}_2 = (0,1,0), \mathbf{b}_3 = (0,0,1) \}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et si $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1 = (1,0), \mathbf{c}_2 = (0,1 \}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = 5\mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2$, a pour matrice

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition *Image d'un vecteur par une application linéaire*

Soit
- ▷ E et F deux espaces vectoriels,
- ▷ $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \,\}$ une base de E,
- ▷ $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m \,\}$ une base de F,
- ▷ $f \colon E \to F$ une application linéaire de E dans F,
- ▷ $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ la matrice $m \times n$ de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F.

Si $\mathbf{u}$ a pour coordonnées $\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ alors $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées $\operatorname{coord}(f(\mathbf{u}), \mathcal{C}) = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ dans la base $\mathcal{C}$ avec

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \qquad \text{pour } 1 \le i \le m,$$

ce qui peut s'illustrer par

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) \in \mathcal{M}_{m,n}} \overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}^{\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{B}) \in \mathcal{M}_{n,1}} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11}u_1 + \dots + a_{1j}u_j + \dots + a_{1n}u_n \\ \vdots \\ a_{i1}u_1 + \dots + a_{ij}u_j + \dots + a_{in}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + \dots + a_{mj}u_j + \dots + a_{mn}u_n \end{pmatrix}}^{\operatorname{coord}(f(\mathbf{u}),\mathcal{C}) \in \mathcal{M}_{m,1}}$$

Attention

La matrice associée à une application linéaire n'est pas unique, elle dépends des bases choisies dans les espaces E et F.

Remarque

La matrice du changement de base $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ correspond à la matrice représentative de l'application linéaire identité relativement aux bases $\mathcal{B}'$ pour l'espace de départ et $\mathcal{B}$ pour l'espace d'arrivé, ainsi $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathbb{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. En effet, considérons l'application linéaire identité

$$\begin{aligned} \mathrm{id} \colon E &\to E \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \,\}$ et $\mathcal{B}' = \{\, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n \,\}$ deux bases du même espace vectoriel E. Alors

$$\begin{cases} \mathrm{id}(\mathbf{e}'_1) = \mathbf{e}'_1 = \sum_{i=1}^{n} p_{i1}\mathbf{e}_i \\ \mathrm{id}(\mathbf{e}'_2) = \mathbf{e}'_2 = \sum_{i=2}^{n} p_{i2}\mathbf{e}_i \\ \dots \\ \mathrm{id}(\mathbf{e}'_j) = \mathbf{e}'_j = \sum_{i=j}^{n} p_{ij}\mathbf{e}_i \\ \dots \\ \mathrm{id}(\mathbf{e}'_n) = \mathbf{e}'_n = \sum_{i=n}^{n} p_{in}\mathbf{e}_i \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_1, \mathcal{B}) = (p_{11}, p_{21}, \dots, p_{n1}) \\ \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_2, \mathcal{B}) = (p_{12}, p_{22}, \dots, p_{n2}) \\ \dots \\ \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_j, \mathcal{B}) = (p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{nj}) \\ \dots \\ \operatorname{coord}(\mathbf{e}'_n, \mathcal{B}) = (p_{1n}, p_{2n}, \dots, p_{nn}) \end{cases}$$

$$\implies \mathbb{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} = \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Propriété

Soit $\mathbb{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$, E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension m. Quelles que soient les bases choisies dans E et F, le rang de l'application linéaire $f\colon E \to F$ associée à $\mathbb{A}$ est toujours le même et est égale au rang de la matrice $\mathbb{A}$.

Propriété

Soit E et F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $f\colon E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors

- ▷ f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$ si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})) = \dim(E)$,
- ▷ f est surjective si et seulement si $\operatorname{im}(f) = F$ si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})) = \dim(F)$,
- ▷ f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$ et $\operatorname{im}(f) = F$ si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})) = \dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $\det(\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})) \neq 0$.

Proposition

Une matrice carrée est inversible si et seulement si c'est la matrice d'un isomorphisme (ou d'une application linéaire bijective entre deux espaces de même dimension).

Exemple

La matrice de l'application linéaire nulle

$$\begin{aligned} f\colon E &\to F \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{0}_F \end{aligned}$$

est toujours la matrice nulle $\mathbb{O}_{n,p}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Exemple

Soient $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \,\}$ et $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{e}'_1 = (1,0), \mathbf{e}'_2 = (0,1) \,\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, et soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que

$$f(\mathbf{e}_1) = (1,2), \quad f(\mathbf{e}_2) = (3,4), \quad f(\mathbf{e}_3) = (5,6).$$

Comme

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2, \quad f(\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}'_1 + 6\mathbf{e}'_2,$$

alors

$$\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^3$, autrement dit $\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{B}) = (x,y,z)$, alors $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ le vecteur

$$\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) \operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+5z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \operatorname{coord}(f(\mathbf{u}),\mathcal{C}).$$

On a donc $\operatorname{coord}(f(\mathbf{u}),\mathcal{C}) = (x+3y+5z; 2x+4y+6z)$, ce qui confirme le calcul direct

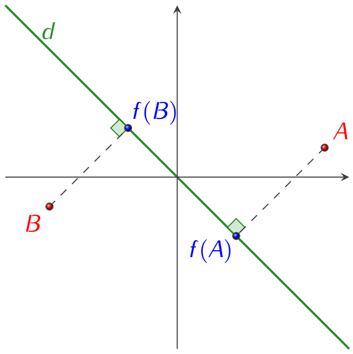
$$f(\mathbf{u}) = xf(\mathbf{e}_1) + yf(\mathbf{e}_2) + zf(\mathbf{e}_3) = x\big(\mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2\big) + y\big(3\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2\big) + z\big(5\mathbf{e}'_1 + 6\mathbf{e}'_2\big) = \big(x+3y+5z\big)\mathbf{e}'_1 + \big(2x+4y+6z\big)\mathbf{e}'_2.$$

Remarque

Si l'application linéaire f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et si on considère la même base $\mathcal{B}$ sur l'espace de départ et d'arrivé, alors on utilise la notation $\mathbb{M}(f,\mathcal{B})$ pour indiquer la matrice $\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$.
Si l'application linéaire f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E mais on considère deux bases différentes pour l'espace de départ et d'arrivé, il faut garder la notation complète.

Exemple

On se donne une droite d (ici, d'équation $y = -x$) et l'application f qui consiste à projeter les points du plan perpendiculairement sur cette droite. L'exemple de la projection orthogonale est un endomorphisme, puisque l'on part du plan pour aller dans le plan.



Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors on peut exprimer f comme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{-x+y}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On résume cette formule sous la forme d'une matrice. Dans le cas présent, la matrice associée à f est la suivante :

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cet endomorphisme n'est pas injectif. Il suffit par exemple de regarder les points $(1, 1)$ et $(2, 2)$, qui sont tous les deux envoyés sur $(0, 0)$. Il y a moyen de rectifier f pour en faire quelque chose d'injectif. On peut, par exemple, prendre l'axe des x comme ensemble de départ. Le morphisme $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ainsi défini est alors bien une application linéaire injective, mais ce n'est plus un endomorphisme.
L'endomorphisme f n'est pas surjectif : le point $(1, 1)$ n'est image d'aucun autre point (en fait, $\operatorname{im}(f) \equiv d$ donc tous les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus d$ n'ont pas d'antécédent). Pour en faire un morphisme surjectif, il suffit de se restreindre à l'arrivée à la droite d. Le morphisme d'espace vectoriel $h\colon \mathbb{R}^2 \to d$ est alors une application linéaire surjective, mais ce n'est plus un endomorphisme.

Changements de bases et applications linéaires

Proposition

Soit
- ▷ E et F deux espaces vectoriels,
- ▷ $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E,
- ▷ $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F,
- ▷ $f\colon E \to F$ une application linéaire de E dans F,

alors

$$\boxed{\mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = \mathbb{P}_{\mathcal{C}' \to \mathcal{C}} \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}.}$$

Les MATRICES $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$ sont dites ÉQUIVALENTES. Elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Notation mnémotechnique

On va noter
- ▷ $\mathbb{F}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ la matrice $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ qui représente l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de l'espace de départ E et $\mathcal{C}$ de l'espace d'arrivé F,
- ▷ $\mathbb{I}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ la matrice $\mathbb{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ qui représente l'application linéaire id (identité) relativement aux bases $\mathcal{B}'$ de l'espace de départ E et $\mathcal{B}$ de l'espace d'arrivé E,
- ▷ etc.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \\
\mathcal{B} \arrow[r, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})", "\color{red}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}')", "\color{red}\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{C},\mathcal{C}') = \mathbb{P}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}", "\color{red}\mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}"'] \\
\mathcal{B}' \arrow[u, "\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}", "\color{red}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}"'] \arrow[ur, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})", "\color{red}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'}"'] \arrow[r, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}')", "\color{red}\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}"'] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

Les quatre parcours suivants sont équivalents :

▷ parcours $\mathcal{C}' \stackrel{f}{\leftarrow} \mathcal{B}'$, représenté par la matrice $\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'}$,

▷ parcours $\mathcal{C}' \stackrel{f}{\leftarrow} \mathcal{B} \stackrel{\mathrm{id}}{\longleftarrow} \mathcal{B}'$, représenté par le produit matriciel $\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$,

▷ parcours $\mathcal{C}' \stackrel{\mathrm{id}}{\longleftarrow} \mathcal{C} \stackrel{f}{\leftarrow} \mathcal{B}'$, représenté par le produit matriciel $\mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'}$,

▷ parcours $\mathcal{C}' \stackrel{\mathrm{id}}{\longleftarrow} \mathcal{C} \stackrel{f}{\leftarrow} \mathcal{B} \stackrel{\mathrm{id}}{\longleftarrow} \mathcal{B}'$, représenté par le produit matriciel $\mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$.

ce qui donne les relations

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} &= \mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} && \Longrightarrow && \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}')\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}'\mathcal{B}) = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}')\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\\
\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} &= \mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} && \Longrightarrow && \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{C},\mathcal{C}')\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})\\
\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} &= \mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} && \Longrightarrow && \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{C},\mathcal{C}')\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}
\end{aligned}$$

Exemple

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x-y\\ y-z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Considérons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{b}'_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{b}'_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{b}'_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\};$$

et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathcal{C}' = \left\{ \mathbf{c}'_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{c}'_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

▷ Pour calculer $\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$ on doit exprimer l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1) = f(1,1,1) = (0,0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},\\ f(\mathbf{b}_2) = f(1,1,0) = (0,1) = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2,\\ f(\mathbf{b}_3) = f(1,0,0) = (1,0) = \mathbf{c}_2,\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \mathrm{coord}(f(\mathbf{b}_1),\mathcal{C}) = (0,0),\\ \mathrm{coord}(f(\mathbf{b}_2),\mathcal{C}) = (1,-1),\\ \mathrm{coord}(f(\mathbf{b}_3),\mathcal{C}) = (0,1),\end{cases}$$

donc
$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▷ Pour calculer $\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}')$ on doit exprimer l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}'$:
$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1') = f(1,1,0) = (0,1) = \mathbf{c}_2', \\ f(\mathbf{b}_2') = f(1,0,1) = (1,-1) = \mathbf{c}_1' - \mathbf{c}_2', \\ f(\mathbf{b}_3') = f(0,1,1) = (-1,0) = -\mathbf{c}_1', \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_1'),\mathcal{C}') = (0,1), \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_2'),\mathcal{C}') = (1,-1), \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_3'),\mathcal{C}') = (-1,0), \end{cases}$$
donc
$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Pour calculer $\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}')$ on doit exprimer l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}'$:
$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1) = f(1,1,1) = (0,0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, \\ f(\mathbf{b}_2) = f(1,1,0) = (0,1) = \mathbf{c}_2', \\ f(\mathbf{b}_3) = f(1,0,0) = (1,0) = \mathbf{c}_1', \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_1),\mathcal{C}') = (0,0), \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_2),\mathcal{C}') = (0,1), \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_3),\mathcal{C}') = (1,0), \end{cases}$$
donc
$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Pour calculer $\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})$ on doit exprimer l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$:
$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1') = f(1,1,0) = (0,1) = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2, \\ f(\mathbf{b}_2') = f(1,0,1) = (1,-1) = -\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2, \\ f(\mathbf{b}_3') = f(0,1,1) = (-1,0) = -\mathbf{c}_2, \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_1'),\mathcal{C}) = (1,-1), \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_2'),\mathcal{C}) = (-1,2), \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{b}_3'),\mathcal{C}) = (0,-1), \end{cases}$$
donc
$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

▷ Pour calculer $\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ on doit exprimer l'image par id de chaque élément de la base $\mathcal{B}'$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{B}$:
$$\begin{cases} \mathrm{id}(\mathbf{b}_1') = \mathrm{id}(1,1,0) = (1,1,0) = \mathbf{b}_2, \\ \mathrm{id}(\mathbf{b}_2') = \mathrm{id}(1,0,1) = (1,0,1) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathrm{id}(\mathbf{b}_3') = \mathrm{id}(0,1,1) = (0,1,1) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3, \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(\mathrm{id}(\mathbf{b}_1'),\mathcal{B}) = (0,1,0), \\ \operatorname{coord}(\mathrm{id}(\mathbf{b}_2'),\mathcal{B}) = (1,-1,1), \\ \operatorname{coord}(\mathrm{id}(\mathbf{b}_3'),\mathcal{B}) = (1,0,-1), \end{cases}$$
donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice
$$\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

▷ Pour calculer $\mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{C},\mathcal{C}') = \mathbb{P}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}$ on doit exprimer l'image par id de chaque élément de la base $\mathcal{C}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}'$:
$$\begin{cases} \mathrm{id}(\mathbf{c}_1) = \mathrm{id}(1,1) = (1,1) = \mathbf{c}_1' + \mathbf{c}_2', \\ \mathrm{id}(\mathbf{c}_2) = \mathrm{id}(1,0) = (1,0) = \mathbf{c}_1', \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(\mathrm{id}(\mathbf{c}_1),\mathcal{C}') = (1,1), \\ \operatorname{coord}(\mathrm{id}(\mathbf{c}_2),\mathcal{C}') = (1,0), \end{cases}$$
donc la matrice de passage de la base $\mathcal{C}'$ à la base $\mathcal{C}$ est la matrice
$$\mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{C},\mathcal{C}') = \mathbb{P}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'on a bien les relations
$$\begin{aligned} &\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} && \textit{i.e.} && \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}')\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \\ &\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}'} && \textit{i.e.} && \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = \mathbb{P}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}) \\ &\mathbb{F}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbb{I}_{\mathcal{C}'\leftarrow\mathcal{C}}\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} && \textit{i.e.} && \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}') = \mathbb{P}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Proposition *Cas particulier : $E = F$.*

Si un endomorphisme $f\colon E \to E$ a pour matrice $\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ dans la base $\mathcal{B}'$, on a

$$\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \mathbb{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\,\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \qquad \text{ou encore} \qquad \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \left(\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1}\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Les MATRICES $\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$ et $\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ sont dites SEMBLABLES.

Notation mnémotechnique

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & E \\
\mathcal{B} \arrow[r, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})", "\mathbb{F}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')", "\mathbb{F}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{B}')=\mathbb{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}", "\mathbb{I}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"'] \\
\mathcal{B}' \arrow[u, "\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}',\mathcal{B})=\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}", "\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}"'] \arrow[ur, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})", "\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}"'] \arrow[r, "\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}')", "\mathbb{F}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}"'] & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}$$

Les quatre parcours suivants sont équivalents :

- ▷ parcours $\mathcal{B}' \xleftarrow{f} \mathcal{B}'$, représenté par la matrice $\mathbb{F}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'}$,
- ▷ parcours $\mathcal{B}' \xleftarrow{f} \mathcal{B} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathcal{B}'$, représenté par le produit matriciel $\mathbb{F}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$,
- ▷ parcours $\mathcal{B}' \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathcal{B} \xleftarrow{f} \mathcal{B}'$, représenté par le produit matriciel $\mathbb{I}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$,
- ▷ parcours $\mathcal{B}' \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathcal{B} \xleftarrow{f} \mathcal{B} \xleftarrow{\mathrm{id}} \mathcal{B}'$, représenté par le produit matriciel $\mathbb{I}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$.

ce qui donne les relations

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'} &= \mathbb{F}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} &&\implies \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}'\mathcal{B}) = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\\
\mathbb{F}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'} &= \mathbb{I}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} &&\implies \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{B}')\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})\\
\mathbb{F}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}'} &= \mathbb{I}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} &&\implies \mathbb{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{B}')\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}
\end{aligned}$$

Rappel : $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (\mathbb{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}})^{-1}$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les deux vecteurs $\mathbf{u} = (3,1)$ et $\mathbf{v} = (5,2)$. Ils forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui même définie par

$$f(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}, \qquad f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}.$$

▷ Par rapport à la base $\mathcal{B}$ sur l'espace de départ et d'arrivé, f a pour matrice représentative la matrice diagonale

$$\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

▷ Comme

$$\begin{cases} \mathrm{id}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \end{cases}$$

alors la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$\mathbb{I}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

▷ Comme
$$\begin{cases}\mathrm{id}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_1=2\mathbf{u}-\mathbf{v},\\ \mathrm{id}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_2=-5\mathbf{u}+3\mathbf{v},\end{cases}$$
alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique $\mathcal{C}$ est la matrice
$$\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}=\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{C},\mathcal{B})=\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}=\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}$$

▷ Déterminons la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et à la base canonique $\mathcal{C}$ pour l'espace d'arrivé :
$$\begin{cases}f(\mathbf{u})=2\mathbf{u}=2(3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=6\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2,\\ f(\mathbf{v})=-\mathbf{v}=-(5\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)=-5\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2,\end{cases}$$
ainsi
$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}=\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix}6&-5\\2&-2\end{pmatrix}.$$

▷ Déterminons maintenant la matrice de f par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$ pour l'espace de départ et à la base $\mathcal{B}$ pour l'espace d'arrivé :
$$\begin{cases}f(\mathbf{e}_1)=f(2\mathbf{u}-\mathbf{v})=2f(\mathbf{u})-f(\mathbf{v})=4\mathbf{u}+\mathbf{v},\\ f(\mathbf{e}_2)=f(-5\mathbf{u}+3\mathbf{v})=-5f(\mathbf{u})+3f(\mathbf{v})=-10\mathbf{u}-3\mathbf{v},\end{cases}$$
ainsi
$$\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}=\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{B})=\begin{pmatrix}4&-10\\1&-3\end{pmatrix}.$$

▷ Déterminons enfin la matrice de f par rapport à la base canonique $\mathcal{C}=\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\,\}$:
$$\begin{cases}f(\mathbf{e}_1)=4\mathbf{u}+\mathbf{v}=4(3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)+(5\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)=17\mathbf{e}_1+6\mathbf{e}_2,\\ f(\mathbf{e}_2)=-10\mathbf{u}-3\mathbf{v}=-10(3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)-3(5\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)=-45\mathbf{e}_1-16\mathbf{e}_2.\end{cases}$$
La matrice de f par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$ pour l'espace de départ et d'arrivé est donc
$$\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}=\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})=\begin{pmatrix}17&-45\\6&-16\end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'on a bien les relations
$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}=\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} &&\text{i.e.} &&\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})=\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\\
&\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}=\mathbb{I}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} &&\text{i.e.} &&\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})=\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{B})\\
&\mathbb{F}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}=\mathbb{I}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{F}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbb{I}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} &&\text{i.e.} &&\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})=\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}
\end{aligned}$$

Équations linéaires

Définition *Équation linéaire*

Une ÉQUATION LINÉAIRE est une équation du type $f(\mathbf{x})=\mathbf{b}$ où
- ▷ f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F,
- ▷ $\mathbf{b}$ est un vecteur de F appelé second membre de l'équation linéaire,
- ▷ l'inconnue $\mathbf{x}$ est dans E.

Exemple

1. Un système linéaire de n équations à p inconnues du type
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1p}x_p=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2p}x_p=b_2\\ \dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{np}x_p=b_n\end{cases}$$
où les données sont les éléments a_{ij} et b_i de $\mathbb{K}$ et où l'inconnue est le vecteur $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ de $\mathbb{K}^n$. L'application linéaire est
$$\begin{aligned}\mathbb{K}^p&\to\mathbb{K}^p\\ \mathbf{x}&\mapsto\mathbb{A}\mathbf{x}\end{aligned}$$
et le second membre est $\mathbf{b}\in\mathbb{K}^p$.

2. Une équation différentielle linéaire du premier ordre du type

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où les données sont les fonctions a, b et c continues sur un intervalle I et où l'inconnue est la fonction y. L'application linéaire est

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^1(I) &\to \mathscr{C}^0(I)\\ y &\mapsto ay' + by\end{aligned}$$

et le second membre est $c \in \mathscr{C}^0(I)$.

Proposition *Structure de l'ensemble des solutions*

Considérons l'équation linéaire $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ et notons $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses solutions. Notons $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_F$. Alors

❶ $\mathscr{S}_0 = \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel (non vide) de E ;

❷ Si $\mathscr{S} \neq \emptyset$ et si $\mathbf{x}_p \in \mathscr{S}$ alors l'ensemble des solutions est une sous-espace vectoriel de E tel que

$$\mathscr{S} = \left\{ \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p \;\middle|\; \mathbf{x}_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}.$$

On énonce ce résultat en disant que la solution d'une équation linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Astuces

Astuce

Si la dimension de $\ker(f)$ est connue, on connaît alors, grâce au théorème du rang, la dimension de $\mathrm{im}(f)$. Si de plus on connaît une base $\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \}$ de E, on sait que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\{ f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n) \}$. On peut alors en déduire une base de $\mathrm{im}(f)$ par «élimination» des vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres vecteurs de l'ensemble $\{ f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n) \}$.

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Pour déterminer $\ker(f)$ on résout le système homogène $f((x,y,z)) = (0,0,0)$:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0,\\ -x + 3y + z = 0,\\ -x - y + z = 0, \end{cases} \iff (x,y,z) = (1,0,1).$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{im}(f)) = 3 - 1 = 2$. La famille

$$\{ f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) \} = \{ (2,-1,-1), (-2,3,-1), (-2,1,1) \}$$

est une famille génératrice de $\mathrm{im}(f)$. On sait alors qu'il suffit d'en extraire une famille libre de cardinal 2 pour obtenir une base, par exemple la famille $\{ (2,-1,-1), (-2,3,-1) \}$.

Astuce

Soit B un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \}$ une base de B, W un espace vectoriel de dimension m et $\mathcal{W} = \{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \}$ une base de W.
Soit f une application linéaire de B dans W de matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{W}$.
Soit $\mathbf{u} \in B$ et supposons de connaître les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, *i.e.* qu'on connaît les n coefficients $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \mathbf{b}_j$.
Pour obtenir les coordonnées de $f(\mathbf{u}) \in W$ dans la la base $\mathcal{W}$, *i.e.* les m coefficients $\omega_1, \dots, \omega_m$ tels que $f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot \mathbf{w}_i$, on peut :

- ▷ soit utiliser la relation
$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_m\end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix};$$
- ▷ soit exprimer chacun des vecteurs $f(\mathbf{b}_j)$ dans la base $\mathcal{W}$, *i.e.* trouver les m coefficients $\eta_{1j},\dots,\eta_{mj}$ tels que $f(\beta_j)=\sum_{i=1}^m \eta_{ij}\cdot\mathbf{w}_i$, et on obtient
$$f(\mathbf{u})=\sum_{j=1}^n \beta_j\cdot f(\mathbf{b}_j)=\sum_{j=1}^n \beta_j\cdot\left(\sum_{i=1}^m \eta_{ij}\cdot\mathbf{w}_i\right)=\sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \eta_{ij}\beta_j\right)}_{\omega_i}\cdot\mathbf{w}_i$$

  où $\mathbb{A}=(\eta_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎ Exercices ✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎

Exercice 4.1

Soit l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+y+z\\ x-y+z\\ x+3y+z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Soit $\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f\begin{pmatrix} u_x+v_x\\ u_y+v_y\\ u_z+v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_x+v_x+u_y+v_y+u_z+v_z\\ u_x+v_x-u_y-v_y+u_z+v_z\\ u_x+v_x+3u_y+3v_y+u_z+v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_x+u_y+u_z\\ u_x-u_y+u_z\\ u_x+3u_y+u_z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_x+v_y+v_z\\ v_x-v_y+v_z\\ v_x+3v_y+v_z\end{pmatrix}=f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}),$$

$$f(\lambda\cdot\mathbf{u})=\begin{pmatrix} \lambda u_x+\lambda u_y+\lambda u_z\\ \lambda u_x-\lambda u_y+\lambda u_z\\ \lambda u_x+3\lambda u_y+\lambda u_z\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix} u_x+u_y+u_z\\ u_x-u_y+u_z\\ u_x+3u_y+u_z\end{pmatrix}=\lambda\cdot f(\mathbf{u}).$$

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\in\ker(f)\iff f(\mathbf{u})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix} u_x+u_y+u_z\\ u_x-u_y+u_z\\ u_x+3u_y+u_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases} u_x+u_y+u_z=0\\ u_x-u_y+u_z=0\\ u_x+3u_y+u_z=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} u_x+u_y+u_z=0\\ -2u_y=0\\ 2u_y=0\end{cases}\iff\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-\kappa\\0\\ \kappa\end{pmatrix},\quad\kappa\in\mathbb{R}.$$

D'où

$$\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}-\kappa\\0\\ \kappa\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\kappa\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\;\middle|\;\kappa\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Par conséquent $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f))=1$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f))+\dim(\operatorname{im}(f))=\dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\operatorname{im}(f))=3-1=2$. Soit $\mathcal{C}=\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad\mathbf{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad\mathbf{c}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

On sait que, pour une application linéaire $f\colon E\to F$, l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\operatorname{im}(f)\subset F$:

$$\operatorname{Vect}\{\,f(\mathbf{c}_1),f(\mathbf{c}_2),f(\mathbf{c}_3)\,\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Comme le cardinal de cette famille est égale à la dimension de $\mathrm{im}(f)$ on conclut que $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.

4. Comme $\ker(f) \neq \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, f n'est pas injective.

   Comme $\dim(\mathrm{im}(f)) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathrm{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, on en déduit que f n'est pas surjective.
5. Soit $\{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$f(\mathbf{c}_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \qquad f(\mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 + 3\mathbf{c}_3, \qquad f(\mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3.$$

   Alors par définition la matrice e f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×3

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2

Soit l'application

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix}x+2y\\y\\x+z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f\begin{pmatrix}u_x+v_x\\u_y+v_y\\u_z+v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_x+v_x+2(u_y+v_y)\\u_y+v_y\\u_x+v_x+u_z+v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_x+2u_y\\u_y\\u_x+u_z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_x+2v_y\\v_y\\v_x+v_z\end{pmatrix} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),$$
$$f(\lambda\cdot\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}\lambda u_x+2\lambda u_y\\\lambda u_y\\\lambda u_x+\lambda u_z\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}u_x+2u_y\\u_y\\u_x+u_z\end{pmatrix} = \lambda\cdot f(\mathbf{u}).$$

   Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}u_x+2u_y\\u_y\\u_x+u_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}u_x+2u_y=0\\u_y=0\\u_x+u_z=0\end{cases} \iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

   D'où

$$\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

   Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 0$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\operatorname{im}(f)) = 3$. De plus, $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ donc $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$. Par conséquent, une base de $\operatorname{im}(f)$ est par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Comme $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, f est injective.

   Comme $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$, on en déduit que f est surjective.

   Ainsi f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   On a

$$f(\mathbf{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3, \qquad f(\mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{c}_1 + 1\mathbf{c}_2, \qquad f(\mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{c}_3.$$

   Alors par définition la matrice e f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×3

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.3

Soit l'application

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto x + y + z \end{aligned}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix} = u_x + v_x + u_y + v_y + u_z + v_z = (u_x + u_y + u_z) + (v_x + v_y + v_z) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}),$$
$$f(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda u_x + \lambda u_y + \lambda u_z = \lambda \cdot (u_x + u_y + u_z) = \lambda \cdot f(\mathbf{u}).$$

   Ainsi f est un application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
2. Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(\mathbf{u}) = 0 \iff u_x + u_y + u_z = 0 \iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ -\kappa_1 - \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\ker(f)=\left\{\left.\begin{pmatrix}\kappa_1\\ \kappa_2\\ -\kappa_1-\kappa_2\end{pmatrix}\ \right|\ \kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left.\kappa_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\kappa_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\ \right|\ \kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

De plus les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaire, donc $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\ker(f)$ et on conclut que $\dim(\ker(f))=2$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f))+\dim(\operatorname{im}(f))=\dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\operatorname{im}(f))=3-2=1$. De plus, $\operatorname{im}(f)\subset\mathbb{R}$ donc $\operatorname{im}(f)=\mathbb{R}$. Par conséquent, une base de $\operatorname{im}(f)$ est par exemple la base canonique de $\mathbb{R}$.
4. Comme $\ker(f)\neq\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, f n'est pas injective.

   Comme $\operatorname{im}(f)=\mathbb{R}$, on en déduit que f est surjective.
5. Soit $\mathcal{C}=\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{W}=\{\,\mathbf{w}\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\qquad \mathbf{w}=1.$$

   On a

$$f(\mathbf{c}_1)=1=\mathbf{w},\qquad f(\mathbf{c}_2)=1=\mathbf{w},\qquad f(\mathbf{c}_3)=1=\mathbf{w}.$$

   Alors par définition la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}$ est la matrice 1×3

$$\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{W})=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4 *CC novembre 2013*

Soit $\mathcal{L}\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-y+z+w\\-x+2y-z\\-x+y+3z-3w\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice associée à $\mathcal{L}$ quand on muni les espaces de départ et d'arrivé avec leur bases canoniques respectives.
2. Déterminer une base et la dimension de $\ker(\mathcal{L})$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{im}(\mathcal{L})$.

Correction.

1. Notons $E=\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de E.

   Notons $F=\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de F.

   Les colonnes de la matrice associée à $\mathcal{L}$ quand on muni les espaces de départ et d'arrivé avec leur bases canoniques respectives sont constituées par les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{F}$ des images par $\mathcal{L}$ des éléments de $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases}\operatorname{coord}\left(\mathcal{L}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=\operatorname{coord}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=(-1,-1,-1),\\ \operatorname{coord}\left(\mathcal{L}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=\operatorname{coord}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=(-1,2,1),\\ \operatorname{coord}\left(\mathcal{L}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=\operatorname{coord}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=(1,-1,3),\\ \operatorname{coord}\left(\mathcal{L}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=\operatorname{coord}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\mathcal{F}\right)=(1,0,-3),\end{cases}\implies \mathbb{M}(\mathcal{L},\mathcal{E},\mathcal{F})=\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\-1&2&-1&0\\-1&1&3&-3\end{pmatrix}$$

2. Noyau de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\ker(\mathcal{L}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \mathcal{L}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -x-y+z+w\\-x+2y-z\\-x+y+3z-3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{F})\begin{pmatrix} x\\y\\z\\w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \kappa\\\kappa\\\kappa\\\kappa \end{pmatrix} \,\middle|\, \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}\right)\end{aligned}$$

et $\dim(\ker(\mathcal{L})) = 1$.

3. Image de $\mathcal{L}$:
   - ▷ $\dim(\mathrm{im}(\mathcal{L})) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(\mathcal{L})) = 3$.
   - ▷ L'ensemble des images d'une base de l'espace de départ (ici $\mathbb{R}^4$) constitue une famille génératrice de l'image de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(\mathcal{L}) &= \operatorname{Vect}\left(\left\{ \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1\\-1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-3 \end{pmatrix} \right\}\right)\end{aligned}$$

   - ▷ La famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\-1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-3 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathrm{im}(\mathcal{L})$ mais ne peut pas en être une base car $\mathrm{card}(\mathcal{B}) > \dim(\mathrm{im}(\mathcal{L}))$. On va en extraire une base : on note d'abord que

$$\begin{pmatrix} 1\\0\\-3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1\\-1\\-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1\\2\\1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\\-1\\3 \end{pmatrix},$$

donc, si on introduit la famille $\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1\\-1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\3 \end{pmatrix} \right\}$, on a $\operatorname{Vect}(\tilde{\mathcal{B}}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$. De plus, $\mathrm{card}(\tilde{\mathcal{B}}) = \dim(\mathrm{im}(\mathcal{L}))$ donc la famille $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathrm{im}(\mathcal{L})$.

Exercice 4.5

Soit l'application

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix} x\\y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x\\y\\x+y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

1. Démontrer qu'elle est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
5. Déterminer sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. Soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x\\u_y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x\\v_y \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f\begin{pmatrix} u_x+v_x\\u_y+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x+v_x\\u_y+v_y\\u_x+v_x+u_y+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x\\u_y\\u_x+u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x\\v_y\\v_x+v_y \end{pmatrix} = f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}),$$

$$f(\lambda\cdot\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \lambda u_x\\\lambda u_y\\\lambda u_x+\lambda u_y \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} u_x\\u_y\\u_x+u_y \end{pmatrix} = \lambda\cdot f(\mathbf{u}).$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x\\u_y \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u_x\\u_y\\u_x+u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_x = 0\\ u_y = 0\\ u_x+u_y = 0 \end{cases} \iff \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0\\0 \end{pmatrix}.$$

D'où
$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 0$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$. Soit $\{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, *i.e.*
$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On sait que $\{ f(\mathbf{c}_1), f(\mathbf{c}_2) \}$ est une famille génératrice de $\mathrm{im}(f)$. De plus, le cardinal de cette famille est égal à la dimension de $\mathrm{im}(f)$, donc $\{ f(\mathbf{c}_1), f(\mathbf{c}_2) \}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$. On a
$$f(\mathbf{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
et on conclut que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.

4. Comme $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, f est injective.

   Comme $\mathrm{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, on en déduit que f n'est pas surjective.

5. Soit $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{W} = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*
$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
$$f(\mathbf{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3, \qquad f(\mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3.$$
Alors par définition la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ est la matrice 3×2
$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.6

Déterminer une application linéaire $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ pour laquelle
$$\ker(f) = \mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(\{ (2,2,3,3), (1,4,4,1) \}).$$

Correction. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et considérons la famille $\mathcal{A} = \{ (2,2,3,3), (1,4,4,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0) \}$; on vérifie facilement que $\mathcal{A}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Une application linéaire qui satisfait aux conditions données est l'application dont la matrice représentative est
$$\mathbb{M}(f, \mathcal{A}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En fait, toutes les applications linéaires qui satisfont aux conditions données ont matrice représentative

$$\mathbb{M}(f,\mathcal{A},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\lambda_1+\mu_1 & 2\lambda_2+\mu_2 \\ 0 & 0 & 2\lambda_1+4\mu_1 & 2\lambda_2+4\mu_2 \\ 0 & 0 & 3\lambda_1+4\mu_1 & 3\lambda_2+4\mu_2 \\ 0 & 0 & 3\lambda_1+\mu_1 & 3\lambda_2+\mu_2 \end{pmatrix}.$$

avec $\mathrm{rg}(\mathbb{M}) = 2$, ce qui est équivalente à imposer $\lambda_1\mu_2 \neq \lambda_2\mu_1$.

Exercice 4.7 *CT Janvier 2012*

Considérons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$V = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x-2y+z=0, y-2t=0 \right\}.$$

1. Déterminer une base de V et déterminer un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ pour laquelle

$$\mathrm{im}(f) = V \qquad \text{et} \qquad \ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=y=z \right\}.$$

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned} V &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x-2y+z=0, y-2t=0 \right\} \\ &= \left\{ (x,2t,4t-x,t) \,\middle|\, (x,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x(1,0,-1,0)+t(0,2,4,1) \,\middle|\, (x,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ (1,0,-1,0), (0,2,4,1) \right\}. \end{aligned}$$

Comme la combinaison linéaire $\alpha(1,0,-1,0)+\beta(0,2,4,1) = (0,0,0,0)$ si et seulement si $\alpha=\beta=0$, on conclut que l'ensemble $\{ \mathbf{v}_1 = (1,0,-1,0), \mathbf{v}_2 = (0,2,4,1) \}$ est une base de V et $\dim(V) = 2$.

On peut compléter cette famille avec deux autres vecteurs pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$ en remarquant que, si $\mathcal{E} = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_4 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

et donc la famille $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^4$. Par conséquent, tout supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^4$ a dimension 2 et une base d'un de ces espaces est la famille $\{ \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$.

2. On cherche une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ pour laquelle

$$\mathrm{im}(f) = V \qquad \text{et} \qquad \ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=y=z \right\}.$$

D'après le théorème du rang, $2 = \dim(V) = \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f))$ donc $\dim(\ker(f)) = 1$. Si on considère par exemple la base de $\mathbb{R}^3$ suivante $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1 = (1,0,0), \mathbf{b}_2 = (1,1,0), \mathbf{b}_3 = (1,1,1) \}$ (il est simple de vérifier qu'il s'agit d'une base), un exemple d'application linéaire qui vérifie ces conditions est

$$f(\mathbf{b}_1) = (1,0,-1,0), \qquad f(\mathbf{b}_2) = (0,2,4,1), \qquad f(\mathbf{b}_3) = (0,0,0,0).$$

Exercice 4.8 *CT Janvier 2012*

Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 2 définie dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs réels et $V \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques. Définissons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon V &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathbb{M} &\mapsto \mathbb{A}\mathbb{M} \end{aligned}$$

1. Construire une base $\mathcal{B}_V$ pour V.

2. Déterminer bases et dimensions des sous-espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$.
3. Est-il possible de trouver une base $\mathcal{B}$ de V qui contient à la fois $\mathbb{A}$ et une base de $\ker(f)$? Justifier la réponse.
4. Calculer la matrice associée à f quand on muni V de la base $\mathcal{B}_V$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la base canonique.
5. Est-il possible de construire une autre application linéaire $g\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to V$ telle que $g \circ f =$ identité ? Justifier la réponse.

Correction.

1. On a
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
et on vérifie facilement que la famille
$$\mathcal{B}_V = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
est libre, il s'agit alors d'une base de V et $\dim(V) = 3$.
2. Caractérisons d'abord le noyau de f :
$$\begin{aligned}\ker(f) = \{\, \mathbb{M} \in V \mid \mathbb{A}\mathbb{M} = \mathbb{O}_2 \,\} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ b-a & c-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$
Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 1$ et une base de $\ker(f)$ est la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
D'après le théorème du rang on déduit que $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$. Comme l'image d'une base par une application linéaire est une famille génératrice de l'image de cette application, on va d'abord calculer l'image de la base $\mathcal{B}_V$ et si le cardinal de cette famille est supérieure à deux, on en extraira une base de l'image :
$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\{\, f(\mathbb{B}_1), f(\mathbb{B}_2), f(\mathbb{B}_3) \,\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Comme le cardinal de la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ coïncide avec la dimension de l'image, elle en constitue une base.
3. Comme $\mathbb{A} \notin \ker(f)$, par le théorème de la base incomplète on peut choisir $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \mathbb{A}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \right\}$ est une base de V, par exemple la famille $\left\{ \mathbb{A}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
4. Soit
   - ▷ $\mathcal{B}_V = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ une base de V et
   - ▷ $\mathcal{E} = \left\{ \mathbb{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Puisque
$$\begin{aligned} f(\mathbb{B}_1) = \mathbb{A}\mathbb{B}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3, \\ f(\mathbb{B}_2) = \mathbb{A}\mathbb{B}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 - \mathbb{E}_4, \\ f(\mathbb{B}_3) = \mathbb{A}\mathbb{B}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_4, \end{aligned}$$
alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_V$ de V et $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est
$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}_V, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. S'il existe une application linéaire $g\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to V$ telle que $g \circ f =$ identité, cela signifie que $g(f(\mathbb{M})) = \mathbb{M}$ pour toute matrice $\mathbb{M} \in V$. Comme $f(\mathbb{M}) = \mathbb{A}\mathbb{M}$, alors il faudrait que $g(\mathbb{A}\mathbb{M}) = \mathbb{M}$ pour toute matrice $\mathbb{M} \in V$, donc l'unique application linéaire g qui vérifie cette égalité est l'application définie par $g(\mathbb{B}) = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ pour tout matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $\det(\mathbb{A}) = 1 - 1 = 0$, la matrice $\mathbb{A}$ n'est pas inversible donc il n'existe aucune application linéaire $g\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to V$ telle que $g \circ f =$ identité.

Exercice 4.9 *CT Janvier 2011*

Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire pour laquelle

$$\ker(f) = \operatorname{Vec}\{\, \mathbf{v}_1 = (1,1,0,-1), \mathbf{v}_2 = (0,1,-1,0)\,\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im}(f) = \pi,$$

où π dénote le plan d'équation $x + y - z = 0$. Trouver la forme générale de la matrice associée à f quand on donne à $\mathbb{R}^4$ et à $\mathbb{R}^3$ leurs bases canoniques.

Correction. Soit

- ▷ $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{c}_1 = (1,0,0,0), \mathbf{c}_2 = (0,1,0,0), \mathbf{c}_3 = (0,0,1,0), \mathbf{c}_4 = (0,0,0,1)\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et
- ▷ $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$ s'écrit formellement

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

On va maintenant trouver des contraintes sur les entrées de la matrice.

▷ On exprime le fait que les images des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^4$ sont dans π.
Comme $\operatorname{im}(f) \subset \pi$, en particulier $f(\mathbf{c}_i) \in \pi$ pour $i = 1,2,3,4$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{c}_1) &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3 \in \pi &&\iff a_{11} + a_{21} - a_{31} = 0\\
f(\mathbf{c}_2) &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3 \in \pi &&\iff a_{12} + a_{22} - a_{32} = 0\\
f(\mathbf{c}_3) &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \in \pi &&\iff a_{13} + a_{23} - a_{33} = 0\\
f(\mathbf{c}_4) &= a_{14}\mathbf{e}_1 + a_{24}\mathbf{e}_2 + a_{34}\mathbf{e}_3 \in \pi &&\iff a_{14} + a_{24} - a_{34} = 0
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} & a_{14}+a_{24} \end{pmatrix}.$$

▷ On exprime le fait que $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont dans le noyau de f.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \in \ker(f) &\iff f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}\\
&\iff f(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_4) = \mathbf{0}\\
&\iff f(\mathbf{c}_1) + f(\mathbf{c}_2) - f(\mathbf{c}_4) = \mathbf{0}\\
&\iff (a_{11} + a_{12} - a_{14})\mathbf{e}_1 + (a_{21} + a_{22} - a_{24})\mathbf{e}_2 + (a_{31} + a_{32} - a_{34})\mathbf{e}_4 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} & a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 \in \ker(f) &\iff f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}\\
&\iff f(\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3) = \mathbf{0}\\
&\iff f(\mathbf{c}_2) - f(\mathbf{c}_3) = \mathbf{0}\\
&\iff (a_{12} - a_{13})\mathbf{e}_1 + (a_{22} - a_{23})\mathbf{e}_2 + (a_{32} - a_{33})\mathbf{e}_4 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{21}+a_{22} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{12}+a_{22} & a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}.$$

▷ On exprime le fait que $\mathrm{rg}(f)=2$.
Comme la deuxième et la troisième colonne coïncident, la quatrième colonne est une combinaison linéaire de la première et de la deuxième et la troisième ligne est une combinaison linéaire de la première et de la deuxième, alors

$$\mathrm{rg}(\mathbb{A})=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Pour que le rang de cette matrice soit 2 il faut que son déterminant soit non nul, d'où la condition $a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$.

Exercice 4.10 *CT Janvier 2011*

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_3[t] &\to \mathbb{R}^4\\ p &\mapsto \begin{pmatrix}p(0)\\ p(1)\\ p(2)\\ p(3)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Montrer que f est bijective.

Correction. Soit
▷ $\mathcal{C}=\left\{\, c_0(t)=1, c_1(t)=t, c_2(t)=t^2, c_3(t)=t^3 \,\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$ et
▷ $\mathcal{E}=\{\, \mathbf{e}_0=(1,0,0,0), \mathbf{e}_1=(0,1,0,0), \mathbf{e}_2=(0,0,1,0), \mathbf{e}_3=(0,0,0,1)\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Comme

$$\begin{aligned}
f(c_0(t))&=c_0(0)\mathbf{e}_0+c_0(1)\mathbf{e}_1+c_0(2)\mathbf{e}_2+c_0(3)\mathbf{e}_3=(1,1,1,1)\\
f(c_1(t))&=c_1(0)\mathbf{e}_0+c_1(1)\mathbf{e}_1+c_1(2)\mathbf{e}_2+c_1(3)\mathbf{e}_3=(0,1,1,1)\\
f(c_2(t))&=c_2(0)\mathbf{e}_0+c_2(1)\mathbf{e}_1+c_2(2)\mathbf{e}_2+c_2(3)\mathbf{e}_3=(0,1,4,9)\\
f(c_3(t))&=c_3(0)\mathbf{e}_0+c_3(1)\mathbf{e}_1+c_3(2)\mathbf{e}_2+c_3(3)\mathbf{e}_3=(0,1,8,27)
\end{aligned}$$

alors la matrice de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ est

$$\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{E})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{E}))=1\times\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&8\\3&9&27\end{pmatrix}\overset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=}\det\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&6\\3&6&24\end{pmatrix}=1\times\det\begin{pmatrix}2&6\\6&24\end{pmatrix}=48-36=12\neq 0$$

donc $\mathrm{rg}(\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{E}))=4$: l'application linéaire est bijective.

Exercice 4.11

Soient E un espace vectoriel de base $\{\,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4\,\}$ et F un espace vectoriel de base $\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3,\mathbf{c}_4,\mathbf{c}_5\,\}$. Construire, si cela est possible, des applications linéaires $f\colon E\to F$ vérifiant :

1. $\mathrm{im}(f)=\mathrm{Vect}\,\{\,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_4\,\}$;
2. $\mathrm{im}(f)=\{\,\mathbf{0}_F\,\}$;
3. $\mathrm{im}(f)=F$;
4. $\ker(f)=\mathrm{Vect}\,(\{\,\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4\,\})$ et $\mathrm{im}(f)=\mathrm{Vect}\,(\{\,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\,\})$.

Correction.

1. Prendre par exemple $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_4$ et $f(\mathbf{b}_3) = f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}_F$.
2. Prendre $f(\mathbf{b}_1) = f(\mathbf{b}_2) = f(\mathbf{b}_3) = f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}_F$ ainsi $\ker(f) = E$.
3. Impossible car $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) \le \dim(E) = 4$ tandis que $\dim(F) = 5$.
4. Prendre par exemple $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_3$ et $f(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{c}_3$ et $f(\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}_F$.

Exercice 4.12

Soient V et W des espaces-vectoriels avec $\dim(V) = 132$ et $\dim(W) = 150$ et considérons $\varphi\colon V \to W$ et $\psi\colon W \to V$ deux applications linéaires.

1. L'application linéaire $\psi \circ \varphi$ peut être bijective ?
2. L'application linéaire ψ peut être injective ?
3. L'application linéaire ψ peut être surjective ?
4. Montrer que $\dim(\ker(\psi)) \ge 18$.
5. Peut-on avoir $\ker(\varphi) = \operatorname{rg}(\varphi)$?
6. Peut-on avoir $\ker(\varphi) = 4\operatorname{rg}(\varphi)$?

Correction.

1. L'application linéaire $\psi \circ \varphi\colon V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} V$ est un endomorphisme donc elle peut être bijective.
2. Si l'application linéaire ψ est injective alors $\dim(\ker(\psi)) = 0$. Comme $\dim(\ker(\psi)) = \dim(W) - \dim(\operatorname{im}(\psi))$, alors $\dim(\operatorname{im}(\psi)) = 150$ ce qui est impossible car $\operatorname{im}(\psi) \subset V$ et $\dim(V) = 132$. Donc ψ ne peut pas être injective.
3. Si l'application linéaire ψ est surjective alors $\dim(\operatorname{im}(\psi)) = \dim(V) = 132$. On a $\dim(\ker(\psi)) = \dim(W) - \dim(\operatorname{im}(\psi)) = 150 - 132 = 18$ ce qui possible car $\ker(\psi) \subset W$ et $\dim(W) = 150$ donc ψ peut être surjective.
4. $\dim(\ker(\psi)) = \dim(W) - \dim(\operatorname{im}(\psi)) = 150 - \dim(\operatorname{im}(\psi))$ avec $0 \le \dim(\operatorname{im}(\psi)) \le \dim(V) = 132$ donc $18 \le \dim(\ker(\psi)) \le 150$.
5. $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{rg}(\varphi)) = 132 - \dim(\operatorname{rg}(\varphi))$. Si $\ker(\varphi) = \operatorname{rg}(\varphi)$ alors $\ker(\varphi) = \operatorname{rg}(\varphi) = 132/2 = 66$ ce qui est possible.
6. $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{rg}(\varphi)) = 132 - \dim(\operatorname{rg}(\varphi))$. Si $\ker(\varphi) = 4\operatorname{rg}(\varphi)$ alors $\ker(\varphi) = 4\operatorname{rg}(\varphi) = 132/5$ ce qui est impossible car $132/5 \notin \mathbb{N}$.

Exercice 4.13 *CT janvier 2014*

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice représentative, quand on muni $\mathbb{R}^3$ de la base canonique sur l'espace de départ et d'arrivé $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{e}_1 = (1,0,0); \mathbf{e}_2 = (0,1,0); \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \,\}$, est

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit ensuite $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{u}_1 = (1,1,0); \mathbf{u}_2 = (1,1,1); \mathbf{u}_3 = (1,0,1) \,\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ la matrice associée à f quand on muni $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B}$ sur l'espace de départ et de la base canonique $\mathcal{C}$ sur l'espace d'arrivé.

Correction. Par définition la j-ème colonne de la matrice $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de l'image par f du j-ème élément de la base $\mathcal{B}$, donc

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \left[\operatorname{coord}(f(\mathbf{e}_1), \mathcal{C}) \,|\, \operatorname{coord}(f(\mathbf{e}_2), \mathcal{C}) \,|\, \operatorname{coord}(f(\mathbf{e}_3), \mathcal{C})\right],$$
$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \left[\operatorname{coord}(f(\mathbf{u}_1), \mathcal{C}) \,|\, \operatorname{coord}(f(\mathbf{u}_2), \mathcal{C}) \,|\, \operatorname{coord}(f(\mathbf{u}_3), \mathcal{C})\right].$$

I. Méthode directe.

On écrit d'abord chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3.$$

On calcule ensuite l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{B}$ et on l'exprime comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = (1,-1,2) + (0,1,2) = (1,0,4) = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = (1,-1,2) + (0,1,2) + (3,3,1) = (4,3,5) = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{u}_3) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = (1,-1,2) + (3,3,1) = (4,2,3) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \operatorname{coord}(f(\mathbf{u}_1), \mathcal{C}) = (1,0,4) \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{u}_2), \mathcal{C}) = (4,3,5) \\ \operatorname{coord}(f(\mathbf{u}_3), \mathcal{C}) = (4,2,3) \end{cases} \implies \mathbb{M}(F, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

II. Méthode du changement de base.

Appliquons la règle du changement de base pour les applications linéaire :

$$\mathbb{M}(F, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}} \mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}.$$

On écrit chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{coord}(\mathbf{u}_1, \mathcal{C}) = (1,1,0) \\ \operatorname{coord}(\mathbf{u}_2, \mathcal{C}) = (1,1,1) \\ \operatorname{coord}(\mathbf{u}_3, \mathcal{C}) = (1,0,1) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a

$$\mathbb{M}(F, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.14 *CT Janvier 2013*

Soit $S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé à la matrice

$$\mathbb{M}(S, \mathcal{D}, \mathcal{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

quand on muni $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{D} = \{\, (1,1,1), (0,2,2), (0,0,3) \,\}$.

1. Écrire $\mathbb{M}(S, \mathcal{C}, \mathcal{C})$ la matrice associée à S quand on muni $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{im}(S)$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker(S)$.

Correction.

1. Pour écrire $\mathbb{M}(S, \mathcal{C}, \mathcal{C})$ la matrice associée à S quand on muni $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $\mathcal{C}$ on a deux méthodes :

   I. Méthode directe. On calcule d'abord l'image par S de chaque élément de la base $\mathcal{D}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} S(1,1,1) &= 0(1,1,1) + 0(0,2,2) + 1(0,0,3) \\ S(0,2,2) &= 0(1,1,1) + 0(0,2,2) + 2(0,0,3) \\ S(0,0,3) &= 0(1,1,1) + 1(0,2,2) + 3(0,0,3) \end{aligned}$$

   et on écrit chaque élément de la base $\mathcal{C}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{D}$:

$$(1,0,0) = 1(1,1,1) - \tfrac{1}{2}(0,2,2) + 0(0,0,3)$$

$$
\begin{aligned}
(0,1,0) &= 0(1,1,1)+\tfrac{1}{2}(0,2,2)-\tfrac{1}{3}(0,0,3)\\
(0,0,1) &= 0(1,1,1)+0(0,2,2)+\tfrac{1}{3}(0,0,3)
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
S(1,0,0) &= 1S(1,1,1)-\tfrac{1}{2}S(0,2,2)=(0,0,3)-\tfrac{1}{2}(0,0,6)=(0,0,0)\\
S(0,1,0) &= \tfrac{1}{2}S(0,2,2)-\tfrac{1}{3}S(0,0,3)=\tfrac{1}{2}(0,0,6)-\tfrac{1}{3}(0,2,11)=(0,-2/3,-2/3)\\
S(0,0,1) &= \tfrac{1}{3}S(0,0,3)=\tfrac{1}{3}(0,2,11)=(0,2/3,11/3)
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
\mathbb{M}(S,\mathcal{C},\mathcal{C})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&2\\0&-2&11\end{pmatrix}
$$

II. Méthode du changement de base.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}(S,\mathcal{C},\mathcal{C}) &= \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{D}}\mathbb{M}(S,\mathcal{D},\mathcal{D})\mathbb{P}_{\mathcal{D}\to\mathcal{C}}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&6&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1/2&0\\0&-1/3&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2/3\\0&-2/3&11/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&2\\0&-2&11\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. $\dim(\operatorname{im}(S))=\operatorname{rg}(\mathbb{M}(S,\mathcal{D},\mathcal{D}))=2$ et une base de $\operatorname{im}(S)$ est la famille $\{\, S(0,1,0), S(0,0,1)\,\}=\{\,(0,-2,-2),(0,2,11)\,\}$ car elle est libre et a cardinal 2.
3. $\dim(\ker(S))=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\operatorname{im}(S))=1$ et une base de $\ker(S)$ est la famille $\{\,(1,0,0)\,\}$.

Exercice 4.15

Soit l'endomorphisme $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$
\mathbb{A}=\begin{pmatrix}-5&-3&0\\10&6&0\\-2&-1&-1\end{pmatrix}.
$$

1. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer une base de son noyau.
3. Déterminer une base de son image.
4. On considère trois vecteurs $\mathbf{u}=(1,-2,0)$, $\mathbf{v}=(-3,5,1)$ et $\mathbf{w}=(0,0,1)$.
   4.1. Démontrer que $\{\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\,\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   4.2. Déterminer $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ et $f(\mathbf{w})$. En déduire la matrice de f dans la base $\{\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\,\}$. On la notera $\mathbb{D}$.
   4.3. Donner un lien matriciel entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{D}$.

Correction. Soit $\mathcal{C}=\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$
\mathbf{c}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.
$$

On a $\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})=\mathbb{A}$.

1. Un endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si la matrice est inversible. Comme

$$
\det(\mathbb{A})=\det\begin{pmatrix}-5&-3&0\\10&6&0\\-2&-1&-1\end{pmatrix}=(-1)\times\det\begin{pmatrix}-5&-3\\10&6\end{pmatrix}=0
$$

$\mathbb{A}$ n'est pas inversible donc f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Il faut d'abord commencer par déterminer $f(\mathbf{n})$ pour tout $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f(\mathbf{n}) = \mathbb{A}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5n_1 - 3n_2 \\ 10n_1 + 6n_2 \\ -2n_1 - n_2 - n_3 \end{pmatrix}.$$

Recherche d'une base du noyau :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f(\mathbf{n}) = 0 \iff \begin{cases} -5n_1 - 3n_2 = 0 \\ 10n_1 + 6n_2 = 0 \\ -2n_1 - n_2 - n_3 = 0 \end{cases} \iff \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3\kappa \\ 5\kappa \\ \kappa \end{pmatrix}, \ \kappa \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -3\kappa \\ 5\kappa \\ \kappa \end{pmatrix} \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \kappa \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \kappa \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\ker(f)$ et on conclut que $\dim(\ker(f)) = 1$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2$. On sait que, pour une application linéaire $f: E \to F$, l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\mathrm{im}(f) \subset F$:

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\{ f(\mathbf{c}_1), f(\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_3) \}\right) = \mathrm{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right).$$

$\{ f(\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_3) \}$ est une famille libre de $\mathrm{im}(f)$. Étant donné que le cardinal de cette famille est égal à la dimension de $\mathrm{im}(f)$, on conclut que $\{ f(\mathbf{c}_2), f(\mathbf{c}_3) \}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.

4. On considère trois vecteurs $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, 5, 1)$ et $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$.

4.1. Pour démontrer que $\{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'elle est une famille libre (car son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$). On dit qu'une famille $\{ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \}$ est libre lorsque

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \implies a_i = 0 \ \forall\ i.$$

Ici

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \iff a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + a_3\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1 - 3a_2 = 0, \\ -2a_1 + 5a_2 = 0, \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \end{cases}$$

donc la famille est libre. Comme $\{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \} \subset \mathbb{R}^3$ et elle a cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, $\{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \} \subset \mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.2. On a

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{u},$$
$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$
$$f(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}.$$

La matrice $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ représentative de f dans la base $\mathcal{B} = \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \}$ est la matrice diagonale

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.3. D'après la formule de changement de base pour les endomorphismes :

$$\mathbb{D} = \mathbb{P}_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}} \mathbb{A} \mathbb{P}_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}}$$

où, par définition, la matrice $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ est telle que sa 1-ère colonne est constituée des coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{C}$, sa 2-ème colonne est constituée des coordonnées de $\mathbf{v}$ dans la base $\mathcal{C}$ et sa 3-ème colonne est constituée des coordonnées de $\mathbf{w}$ dans la base $\mathcal{C}$, *i.e.*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}^{-1}$.

Exercice 4.16

On considère l'application linéaire f de matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (2,-1,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,-1)$ et $\mathbf{u}_3 = (-2,1,3)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les matrices de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.
3. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Correction. Soit $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \,\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C}) = \mathbb{A}$.

1. Comme $\det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, les vecteurs sont linéairement indépendants, ainsi $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \,\}$ est une famille libre. Comme $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Les colonnes de la matrice $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ sont données par les vecteurs de $\mathcal{B}$:
$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$
pour obtenir $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ il faut inverser $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. On trouve
$$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors
$$\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\mathbb{A}\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & -81 & 78 \\ -32 & 45 & -44 \\ -75 & 105 & -103 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.17

On note $f\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ l'application linéaire définie par $f(p)(x) = p(x+1) - p(x)$.

1. Déterminer la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B})$ de f dans la base $\mathcal{B} = \left\{\, 1, x, x^2, x^3, x^4 \,\right\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Déterminer la matrice $\mathbb{C} = \mathbb{M}(f,\mathcal{C})$ de f dans la base de $\mathbb{R}_4[x]$
$$\mathcal{C} = \{\, 1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3) \,\}$$
3. Calculer les matrices de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$. Quelle est la relation entre $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$?

4. Décrire sous forme de Vect, en précisant leurs dimensions, le noyau et l'image de f.

Correction. Notons

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_1(x)=1 && \mathbf{b}_2(x)=x && \mathbf{b}_3(x)=x^2 && \mathbf{b}_4(x)=x^3 && \mathbf{b}_5(x)=x^4\\
&\mathbf{c}_1(x)=1 && \mathbf{c}_2(x)=x && \mathbf{c}_3(x)=x(x-1) && \mathbf{c}_4(x)=x(x-1)(x-2) && \mathbf{c}_5(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\\
& && && \phantom{\mathbf{c}_3(x)}=x^2-x && \phantom{\mathbf{c}_4(x)}=x^3-3x^2+2x && \phantom{\mathbf{c}_5(x)}=x^4-6x^3+11x^2-6x
\end{aligned}$$

1. On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}$ par f :

$$\begin{cases}
f(\mathbf{b}_1)=0=\mathbf{0},\\
f(\mathbf{b}_2)=1=\mathbf{b}_1,\\
f(\mathbf{b}_3)=2x+1=2\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_1,\\
f(\mathbf{b}_4)=3x^2+3x+1=3\mathbf{b}_3+3\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_1,\\
f(\mathbf{b}_5)=4x^3+6x^2+4x+1=4\mathbf{b}_4+6\mathbf{b}_3+4\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_1,
\end{cases}
\implies \mathbb{B}=\mathbb{M}(f,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&2&3&4\\0&0&0&3&6\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2. On calcule l'image de chaque vecteur de $\mathcal{C}$ par f :

$$\begin{cases}
f(\mathbf{c}_1)=0=\mathbf{0},\\
f(\mathbf{c}_2)=1=\mathbf{c}_1,\\
f(\mathbf{c}_3)=2x=2\mathbf{c}_1,\\
f(\mathbf{c}_4)=3x(x-1)=3\mathbf{c}_2,\\
f(\mathbf{c}_5)=4x(x-1)(x-2)=4\mathbf{c}_4,
\end{cases}
\implies \mathbb{C}=\mathbb{M}(f,\mathcal{C})=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3. On calcule les coordonnées de chaque vecteur de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases}
\mathbf{c}_1=\mathbf{b}_1,\\
\mathbf{c}_2=\mathbf{b}_2,\\
\mathbf{c}_3=\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_2,\\
\mathbf{c}_4=\mathbf{b}_4-3\mathbf{b}_3+2\mathbf{b}_2,\\
\mathbf{c}_5=\mathbf{b}_5-6\mathbf{b}_4+11\mathbf{b}_3-6\mathbf{b}_2,
\end{cases}
\implies \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}=\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{C},\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-1&2&-6\\0&0&1&-3&11\\0&0&0&1&-6\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Pour calculer $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ soit on calcule la matrice inverse de $\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$, soit on résout le système linéaire précédent ; on trouve

$$\begin{cases}
\mathbf{b}_1=\mathbf{c}_1,\\
\mathbf{b}_2=\mathbf{c}_2,\\
\mathbf{b}_3=\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_2,\\
\mathbf{b}_4=\mathbf{c}_4+3\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_2,\\
\mathbf{b}_5=\mathbf{c}_5+6\mathbf{c}_4+7\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_2,
\end{cases}
\implies \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}=\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&1&3&7\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

et la relation cherchée est

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\mathbb{C}\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}=\mathbb{B}.$$

4. On a $\dim(\mathrm{im}(f))=\mathrm{rg}(\mathbb{B})=4$, donc $\dim(\ker(f))=\dim(\mathbb{R}_4[x])-\dim(\mathrm{im}(f))=1$. Une base de $\mathrm{im}(f)$ est alors l'ensemble $\{\, f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5)\,\}$. Étant donné que $\mathrm{Vect}\{\, f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5)\,\}\subset\mathbb{R}_3[x]$ et que $\dim(\mathbb{R}_3[x])=3$ on conclut que $\mathrm{Vect}\{\, f(\mathbf{b}_2), f(\mathbf{b}_3), f(\mathbf{b}_4), f(\mathbf{b}_5)\,\}=\mathbb{R}_3[x]$, une autre base de $\mathrm{im}(f)$ est alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$. Comme $f(\mathbf{b}_1)=\mathbf{0}$, une base de $\ker(f)$ est l'ensemble $\{\,\mathbf{b}_1\,\}$, *i.e.* le sous-espace vectoriel constitué par les polynômes constants : $\ker(f)=\mathbb{R}_0[x]$.

Exercice 4.18 *CT Juin 2012*

Soient $\mathcal{E}=\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\,\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{V}=\{\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\,\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases}
\mathbf{v}_1=5\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{v}_2=-4\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{v}_3=3\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2-5\mathbf{e}_3.
\end{cases}$$

On note $\mathbb{I}$ la matrice identité 3×3 et on pose $\mathbb{A}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3\\ -4 & -4 & 4\\ 5 & 0 & -5\end{pmatrix}$.
On considère id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme qui envoie la base $\mathcal{E}$ sur la base $\mathcal{V}$.
Sans faire de calculs donner

1. $\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{E},\mathcal{E})$ la matrice associée à l'endomorphisme id quand on muni l'espace de départ de la base $\mathcal{E}$ et l'espace d'arrivé de la base $\mathcal{E}$
2. $\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{V},\mathcal{E})$ la matrice associée à l'endomorphisme id quand on muni l'espace de départ de la base $\mathcal{V}$ et l'espace d'arrivé de la base $\mathcal{E}$
3. $\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{E},\mathcal{V})$ la matrice associée à l'endomorphisme id quand on muni l'espace de départ de la base $\mathcal{E}$ et l'espace d'arrivé de la base $\mathcal{V}$
4. $\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{E})$ la matrice associée à l'endomorphisme f quand on muni l'espace de départ de la base $\mathcal{E}$ et l'espace d'arrivé de la base $\mathcal{E}$
5. $\mathbb{M}(f,\mathcal{V},\mathcal{E})$ la matrice associée à l'endomorphisme f quand on muni l'espace de départ de la base $\mathcal{V}$ et l'espace d'arrivé de la base $\mathcal{E}$
6. $\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{V})$ la matrice associée à l'endomorphisme f quand on muni l'espace de départ de la base $\mathcal{E}$ et l'espace d'arrivé de la base $\mathcal{V}$

Correction.

$$\begin{aligned}\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^3\\ \mathbf{u}&\mapsto\mathbf{u}\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}f\colon \mathbb{R}^3&\to\mathbb{R}^3\\ \mathbf{u}&\mapsto f(\mathbf{u}) \text{ tel que } \operatorname{coord}(f(\mathbf{u}),\mathcal{E})=\mathbb{I}\cdot\operatorname{coord}(\mathbf{u},\mathcal{V})\end{aligned}$$

donc

1. $\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{E},\mathcal{E})=\mathbb{I}$
2. $\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{V},\mathcal{E})=\mathbb{A}=\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{V}}$
3. $\mathbb{M}(\mathrm{id},\mathcal{E},\mathcal{V})=\mathbb{A}^{-1}=\mathbb{P}_{\mathcal{V}\to\mathcal{E}}$
4. $\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{E})=\mathbb{A}$
5. $\mathbb{M}(f,\mathcal{V},\mathcal{E})=\mathbb{A}^{-1}$
6. $\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{V})=\mathbb{I}$

Exercice 4.19 *V. Le Roux*

On considère la question suivante :

> «Soit E l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions sin et cos. Calculer le déterminant de l'application «dérivation» de E dans E.»

1. Préciser la question en relevant toutes les affirmations implicites ou ambiguës et rédiger un énoncé d'exercice détaillé. Montrer les affirmations implicites et répondre à la question.
2. Donner l'inverse de cette application «dérivation».

Correction.

1. Posons le problème :
   - ▷ E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions sin et cos : $E=\operatorname{Vect}(\{\sin,\cos\})$.
   - ▷ E a dimension 2 et est engendré par une famille de cardinal 2 donc la famille $\mathcal{E}=\{\sin,\cos\}$ est une base de E.

   Notons f l'application «dérivation» de E dans E :
   $$\begin{aligned}f\colon E&\to E\\ \alpha\sin(x)+\beta\cos(x)&\mapsto\big(\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)\big)'\end{aligned}$$
   Puisque $f(\sin)=\cos$ et $f(\cos)=-\sin$, alors la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{E}$ est
   $$\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{E})=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$
2. L'inverse de cette application «dérivation» a pour matrice représentative l'inverse de la matrice $\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{E})$:
   $$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$$
   i.e. $f^{-1}(\sin)=-\cos$ et $f^{-1}(\cos)=\sin$ (f^{-1} est donc la fonction «calcul de la primitive» de E dans E).

Exercice 4.20 *V. Guirardel*

1. On considère le système suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} x+y+z+t=a\\ x-y-z-t=b\\ -x-y+t=c\\ -3x+y-3z-7t=d \end{cases}$$

   1.1. À quelle condition le système (S) admet-il une solution ?

   1.2. Montrer que si $a,b,c,d>0$ alors le système (S) n'a pas de solution.

   1.3. Quel est l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

2. Notons

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\-1&-1&0&1\\-3&1&-3&-7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\qquad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}.$$

   Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4\\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbb{A}\mathbf{u}\end{aligned}$$

   2.1. Calculer $f(\mathbf{u})$.

   2.2. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})$.

   2.3. f est-elle surjective ? injective ? Trouver l'image et le noyau de f.

   2.4. f est-elle inversible ?

   2.5. Le vecteur $(1,1,1,1)^T$ appartient-il à l'image de f ? au noyau de f ?

3. Le vecteur

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

   appartient-il à l'espace vectoriel engendré par

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{v}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-7\end{pmatrix}?$$

4. Ces quatre vecteurs sont-ils linéairement indépendantes ?

Correction.

1. L'écriture matricielle du système (S) est $\mathbb{A}\mathbf{u}=\mathbf{w}$.

   1.1. Le système (S) admet une ou plusieurs solutions ssi $\operatorname{rg}(\mathbb{A})=\operatorname{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{w}])$.

   1.2. En utilisant la méthode de Gauss on obtient le système équivalent

$$[\mathbb{A}|\mathbf{w}]=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&a\\1&-1&-1&-1&b\\-1&-1&0&1&c\\-3&1&-3&-7&d\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3+L_1\\L_4\leftarrow L_4+3L_1}]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&a\\0&-2&-2&-2&b-a\\0&0&1&2&c+a\\0&4&0&-4&d+3a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4+2L_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&a\\0&-2&-2&-2&b-a\\0&0&1&2&c+a\\0&0&-4&-8&d+a+2b\end{array}\right)\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4+4L_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&a\\0&-2&-2&-2&b-a\\0&0&1&2&c+a\\0&0&0&0&d+5a+2b+4c\end{array}\right)$$

Donc $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = \mathrm{rg}([\mathbb{A}|\mathbf{w}])$ ssi $d = -5a - 2b - 4c$: si $a, b, c, d > 0$ alors le système (S) n'a pas de solution. De plus, $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 3$ donc si le système admet des solutions, elle sont une infinité.

1.3. Toutes les solutions du système homogène associé s'écrivent comme $(0, \kappa, -2\kappa, \kappa)^T$ avec $\kappa \in \mathbb{R}$.

2. 2.1. $f(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$.

   2.2. $\mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathbb{A}$

   2.3. f n'est pas surjective car $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 3 < 4$. f n'est pas injective car $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 3 < 4$.
   Le noyau de f est constitué des vecteurs $\mathbf{u}$ tels que $\mathbb{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, autrement dit les vecteurs solution du système homogène. On a alors
   $$\ker(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   et $\dim(\ker(f)) = 1$.
   On sait que $\dim(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 3$ et $\mathrm{im}(f)$ est engendrée par les colonnes de $\mathbb{A}$. En effet, comme l'image d'une base par une application linéaire est une famille génératrice de l'image de cette application, on va d'abord calculer l'image de la base canonique et si le cardinal de cette famille est supérieure à trois, on en extraira une base de l'image :
   $$\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_4) \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right\}$$
   car $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2$.

   2.4. f n'est pas inversible car elle n'est ni injective ni surjective.

   2.5. Le vecteur $(1, 1, 1, 1)^T$ n'appartient pas à l'image de f car le système (S) n'a pas de solution lorsque $a, b, c, d > 0$. Il n'appartient pas non plus au noyau de f car il n'existe aucun $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $(1, 1, 1, 1)^T = (0, \kappa, -2\kappa, \kappa)^T$.

3. L'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ est l'image de f et le vecteur $\mathbf{v}$ n'appartient pas à cet espace vectoriel car toutes ses composantes sont positives.

4. Les quatre vecteurs ne sont pas linéairement indépendantes, en effet $\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$.

Exercice 4.21

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par
$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}_2[x] &\to E \\ p &\mapsto (2x+1)p + (1-x^2)p' \end{aligned}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$? Si oui, déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction.

1. Soit p et q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f(p+q) &= (2x+1)(p+q) + (1-x^2)(p+q)' = (2x+1)(p+q) + (1-x^2)(p'+q') \\ &= (2x+1)p + (1-x^2)p' + (2x+1)q + (1-x^2)q' = f(p) + f(q), \\ f(\lambda \cdot p) &= (2x+1)(\lambda p) + (1-x^2)(\lambda p)' = (2x+1)(\lambda p) + (1-x^2)(\lambda p') = \lambda \cdot f(p). \end{aligned}$$
   Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ dans E. De plus, si $p \in \mathbb{R}_2[x]$, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $p(x) = a + bx + cx^2$ et
   $$\begin{aligned} f(p(x)) &= (2x+1)p(x) + (1-x^2)p'(x) \\ &= (2x+1)(a+bx+cx^2) + (1-x^2)(b+2cx) \\ &= 2ax + 2bx^2 + 2cx^3 + a + bx + cx^2 + b + 2cx - bx^2 - 2cx^3 \\ &= (a+b) + (2a+b+2c)x + (b+c)x^2 \in \mathbb{R}_2[x]. \end{aligned}$$
   On conclut que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. La base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $\mathcal{C} = \left\{ c_0(x) = 1, c_1(x) = x, c_2(x) = x^2 \right\}$ et l'on a

$$\begin{aligned} f(c_0(x)) &= 1 + 2x, \\ f(c_1(x)) &= 1 + x + x^2, \\ f(c_2(x)) &= 2x + x^2, \end{aligned}$$

donc par définition la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ est

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\det(\mathbb{C}) = -3 \neq 0$, ce qui prouve que $\mathbb{C}$ est inversible, donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. On sait que, si $\mathbb{C}$ est la matrice de l'automorphisme f dans la base $\mathcal{C}$, alors $\mathbb{C}^{-1}$ est la matrice de l'automorphisme f^{-1} dans la base $\mathcal{C}$. Pour calculer $\mathbb{C}^{-1}$ on résout le système

$$\begin{cases} x+y \quad =a, \\ 2x+y+2z=b, \\ \quad y \ +z=c, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x+y \quad =a, \\ -y+2z=b-2a, \\ \quad y \ +z=c, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x+y \quad =a, \\ -y+2z=b-2a, \\ \quad 3z=b+c-2a, \end{cases}$$

d'où

$$z = \frac{-2a+b+c}{3}, \qquad y = \frac{2a-b+2c}{3}, \qquad x = \frac{a+b-2c}{3}.$$

La matrice de f^{-1} dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ est alors

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'écrire facilement l'endomorphisme $f^{-1} \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$:

$$f^{-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \frac{a_0 + a_1 - 2a_2}{3} + \frac{2a_0 - a_1 + 2a_2}{3}x + \frac{-2a_0 + a_1 + a_2}{3}x^2.$$

Pour résumer, soit $\mathcal{C} = \left\{ 1, x, x^2 \right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et p et q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$;

▷ si $\operatorname{coord}(p, \mathcal{C}) = (a, b, c)$, *i.e.* $p(x) = a + bx + cx^2$, alors

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}_2[x] &\to \mathbb{R}_2[x] \\ a + bx + cx^2 &\mapsto (a+b) + (2a+b+2c)x + (b+c)x^2 \end{aligned}$$

en effet $\operatorname{coord}(f(p), \mathcal{C}) = \mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \cdot \operatorname{coord}(p, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b, 2a+b+2c, b+c)$;

▷ si $\operatorname{coord}(q, \mathcal{C}) = (\alpha, \beta, \gamma)$, *i.e.* $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon \mathbb{R}_2[x] &\to \mathbb{R}_2[x] \\ \alpha + \beta x + \gamma x^2 &\mapsto \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3} + \frac{2\alpha-\beta+2\gamma}{3}x + \frac{-2\alpha+\beta+\gamma}{3}x^2 \end{aligned}$$

en effet $\operatorname{coord}(f^{-1}(q), \mathcal{C}) = \mathbb{M}(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \cdot \operatorname{coord}(q, \mathcal{C}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \left(\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{3}, \frac{2\alpha-\beta+2\gamma}{3}, \frac{-2\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$.

On vérifie facilement que $f(f^{-1}(r)) = f^{-1}(f(r)) = r$ pour tout $r \in \mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 4.22

On note $f \colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ l'application linéaire définie par $f(p)(x) = (x-1)p'(x) - p(x)$.

1. Calculer $f(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$. En déduire $\ker(f)$.
2. L'équation $f(p) = q$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}_4[x]$ pour tout q de $\mathbb{R}_4[x]$?
3. Calculer $f((x-1)^k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. En déduire une caractérisation des polynômes q pour lesquels l'équation $f(p) = q$ a des solutions.

Correction.

1. $f(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = (x-1)(4ax^3+3bx^2+2cx+d)-(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = 3ax^4+(2b-4a)x^3+(c-3b)x^2-2cx-d-e$. Par conséquent $f(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)=0$ si et seulement si $a=b=c=0$ et $e=-d$, ce qui implique $\ker(f)=\{\, dx-d \mid d\in\mathbb{R}\,\}=\operatorname{Vect}\{\, x-1\,\}$.
2. Comme $\dim(\ker(f))=1$, alors $\dim(\operatorname{im}(f))=4$, ce qui prouve que f n'est pas surjective, donc l'équation $f(p)=q$ n'a pas toujours de solution.
3. La famille $\left\{\, (x-1)^k \;\middle|\; k=0,1,2,3,4\,\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[x]$ donc $\operatorname{im}(f)=\operatorname{Vect}\left\{\, f(x-1)^k \;\middle|\; k=0,1,2,3,4\,\right\}$. Comme $f((x-1)^k)=(k-1)(x-1)^k$ alors $\operatorname{im}(f)=\operatorname{Vect}\left\{\, (x-1)^k \;\middle|\; k=0,2,3,4\,\right\}$. On sait que $\dim(\operatorname{im}(f))=4$ donc $\left\{\, (x-1)^k \;\middle|\; k=0,2,3,4\,\right\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$. Par conséquent tout polynôme $q\in\mathbb{R}_4[x]$ dont l'écriture dans la base $\left\{\, (x-1)^k \;\middle|\; k=0,1,2,3,4\,\right\}$ n'as pas de terme en $(x-1)$ est dans l'image de f et l'équation $f(p)=q$ a des solutions.

Exercice 4.23 *CT Janvier 2011*

Soit $T\colon V\to V$ un endomorphisme de V. Considérons deux bases différentes de V, à savoir $\mathcal{E}=\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\,\}$ et $\mathcal{W}=\{\,\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\,\}$. Nous savons que

$$T(\mathbf{e}_1)=3\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{w}_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,$$
$$T(\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{w}_2=2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2.$$

Trouver la matrice de T dans la base $\mathcal{W}$.

Correction. On a

$$\mathbf{e}_1=3\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2, \qquad \mathbf{e}_2=-2\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2.$$

donc

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{w}_1)&=T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=T(\mathbf{e}_1)+T(\mathbf{e}_2)=(3\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2)+(\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2)\\
&=4\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2=4(3\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)+2(-2\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)=8\mathbf{w}_1-2\mathbf{w}_2,\\
T(\mathbf{w}_2)&=T(2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=2T(\mathbf{e}_1)+3T(\mathbf{e}_2)=2(3\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2)+3(\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2)\\
&=9\mathbf{e}_1+8\mathbf{e}_2=9(3\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)+8(-2\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)=11\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2,
\end{aligned}$$

et la matrice de T dans la base $\mathcal{W}=\{\,\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\,\}$ est

$$\mathbb{W}=\begin{pmatrix}8 & 11\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

On obtient le même résultat d'après la formule du changement de base :
▷ matrice de T dans la base $\mathcal{E}=\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\,\}$:

$$\mathbb{E}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

▷ matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{W}$:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{W}}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

▷ matrice de passage de $\mathcal{W}$ à $\mathcal{E}$:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{W}\to\mathcal{E}}=\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{W}}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

▷ matrice de T dans la base $\mathcal{W}$:

$$\mathbb{W}=\mathbb{P}_{\mathcal{W}\to\mathcal{E}}\mathbb{E}\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{W}}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 11\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4.24 *CT janvier 2014*

Soit $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{u}_1 = (1,0,1); \mathbf{u}_2 = (0,-1,0); \mathbf{u}_3 = (2,0,0) \,\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que

$$f(\mathbf{u}_1) = (3,1,2), \qquad f(\mathbf{u}_2) = (0,1,1), \qquad f(\mathbf{u}_3) = (6,4,6).$$

1. Exprimer les vecteurs de la base canonique $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{e}_1 = (1,0,0); \mathbf{e}_2 = (0,1,0); \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \,\}$ en terme des vecteurs de $\mathcal{B}$.
2. Utiliser le point précédent pour déterminer la matrice $\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})$ associée à f quand on muni $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{C}$ sur l'espace de départ et d'arrivé.
3. Déterminer une base et la dimension de l'image et du noyau de f.

Correction. On a

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}_1) = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{u}_3) = 6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \end{cases} \implies \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. On cherche les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de chaque élément de $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_3 \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. En utiliser la matrice de changement de base calculée au point précédent on détermine la matrice $\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})$ associée à f quand on muni $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{C}$ sur l'espace de départ et d'arrivé :

$$\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}}\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})\mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{u}_1) - \frac{1}{2}f(\mathbf{u}_3) = \big(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\big) - \frac{1}{2}\big(6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3\big) = -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = -f(\mathbf{u}_2) = -\big(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\big) = -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}f(\mathbf{u}_3) = \frac{1}{2}\big(6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3\big) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases} \implies \mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. $\dim(\operatorname{im}(f)) = \operatorname{rg}(\mathbb{M}(f,\mathcal{C},\mathcal{C})) = 2$ et une base de l'image de f est la famille $\{\, f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_3) \,\}$.
   $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{im}(f)) = 1$ et une base du noyau de f est la famille constituée de l'unique vecteur $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

Exercice 4.25 *CT Septembre 2009*

Dans la suite on notera $\mathbb{R}_2[t]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Si p est un de ces polynôme, p' dénotera sa dérivée.
Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[t]$ défini par

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R}_2[t] &\to \mathbb{R}_2[t] \\ p(t) &\mapsto (-2at+1)p(t) + (at^2+b)p'(t) \end{aligned}$$

où a et b sont des nombres réels. Déterminer la valeur du produit ab pour que le rang de L soit 2 ou 3.

Correction.

Le rang de L coïncide avec la rang d'une des matrices qui le représentent. Calculons alors une de ces matrices. La base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$ est $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{c}_0(t) = 1, \mathbf{c}_1(t) = t, \mathbf{c}_2(t) = t^2 \right\}$ et l'on a

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{c}_0(t)) &= (-2at+1)(1) + (at^2+b)0 = \mathbf{c}_0(t) - 2a\mathbf{c}_1(t),\\
L(\mathbf{c}_1(t)) &= (-2at+1)(t) + (at^2+b)1 = b\mathbf{c}_0(t) + \mathbf{c}_1(t) - a\mathbf{c}_2(t),\\
L(\mathbf{c}_2(t)) &= (-2at+1)(t^2) + (at^2+b)2t = 2b\mathbf{c}_1(t) + \mathbf{c}_2(t),
\end{aligned}$$

donc par définition la matrice de L dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[t]$ est

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ -2a & 1 & 2b \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(\mathbb{C}) = (1+0+0) - (0-2ab-2ab) = 1+4ab$,
▷ si $ab \neq 1/4$ alors $\mathrm{rg}(\mathbb{C}) = \mathrm{rg}(L) = 3$;
▷ si $ab = 1/4$ alors $\mathrm{rg}(\mathbb{C}) = \mathrm{rg}(L) < 3$ et comme la première colonne et la dernière colonne sont linéairement indépendantes, $\mathrm{rg}(\mathbb{C}) = \mathrm{rg}(L) = 2$.

Exercice 4.26 *CT Février 2010*

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[t]$ défini par

$$\begin{aligned}
L\colon \mathbb{R}_2[t] &\to \mathbb{R}_2[t]\\
p &\mapsto p + 3p' + 4p''
\end{aligned}$$

1. Donner la matrice de L quand on muni l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[t]$ de sa base canonique.
2. Donner une base du noyau et de l'image de L.
3. Montrer que L est inversible et calculer la matrice $\mathbb{M}$ associée à L^{-1} dans la base canonique. Si l'on dénote avec $\mathbf{u}_1$ le vecteur colonne des composantes du polynôme générique $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, vis-à-vis de la base canonique, déterminer les vecteurs colonnes $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ des composantes respectives de p' et de p''. Montrer que
$$\mathbb{M}\mathbf{u}_1 = \kappa_1\mathbf{u}_1 + \kappa_2\mathbf{u}_2 + \kappa_3\mathbf{u}_3$$
où les coefficients κ_1, κ_2 et κ_3 sont à calculer. Utiliser ce dernier calcul pour montrer que
$$L^{-1}(p) = p - 3p' + 5p''.$$

Correction.

1. La base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$ est $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{c}_0(t) = 1, \mathbf{c}_1(t) = t, \mathbf{c}_2(t) = t^2 \right\}$ et l'on a
$$\begin{aligned}
L(\mathbf{c}_0(t)) &= (1) + 3(0) + 4(0) = \mathbf{c}_0(t),\\
L(\mathbf{c}_1(t)) &= (t) + 3(1) + 4(0) = 3\mathbf{c}_0(t) + \mathbf{c}_1(t),\\
L(\mathbf{c}_2(t)) &= (t^2) + 3(2t) + 4(2) = 8\mathbf{c}_0(t) + 6\mathbf{c}_1(t) + \mathbf{c}_2(t),
\end{aligned}$$
donc par définition la matrice de L dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_2[t]$ est
$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Recherche d'une base du noyau :
$$\begin{aligned}
q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \ker(L) &\iff L(q) = 0\\
&\iff (a_0 + 3a_1 + 8a_2) + (a_1 + 6a_2)t + a_2 t^2 = 0\\
&\iff \begin{cases} a_0 + 3a_1 + 8a_2 = 0,\\ a_1 + 6a_2 = 0,\\ a_2 = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \qquad a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

d'où $\ker(L) = \{ 0 \}$ et $\dim(\ker(L)) = 0$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{im}(L)) = \dim(\mathbb{R}_2[t]) - \dim(\ker(L)) = 3$. Comme $\text{im}(L) \subset \mathbb{R}_2[t]$, alors $\text{im}(L) = \mathbb{R}_2[t]$ donc $\mathcal{C}$ est une base de $\text{im}(L)$.

3. L est inversible si et seulement si la matrice qui le représente dans une base donnée est inversible. Si on considère la base canonique, étant donné que $\det(\mathbb{C}) = (1+0+0)-(0+0+0) = 1$, $\mathbb{C}$ est inversible. La matrice $\mathbb{M}$ associée à L^{-1} dans la base canonique est alors l'inverse de $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + 3y + 8z = a, \\ y + 6z = b, \\ z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - 3b + 10c, \\ y = b - 6c, \\ z = c \end{cases}$$

donc

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on dénote avec $\mathbf{u}_1 = (a_0, a_1, a_2)$ le vecteur colonne des composantes du polynôme générique $a_0+a_1t+a_2t^2$, vis-à-vis de la base canonique, alors les vecteurs colonnes $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ des composantes respectives de p' et de p'' sont respectivement les vecteurs $\mathbf{u}_2 = (a_1, 2a_2, 0)$ et $\mathbf{u}_3 = (2a_2, 0, 0)$. Alors

$$\mathbb{M}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - 3a_1 + 10a_2 \\ a_1 - 6a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3.$$

Par conséquent, si $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, alors

$$\text{coord}(L^{-1}(p), \mathcal{C}) = \mathbb{M}\,\text{coord}(\mathbf{u}_1, \mathcal{C}) = \text{coord}(\mathbf{u}_1, \mathcal{C}) - 3\,\text{coord}(\mathbf{u}_2, \mathcal{C}) + 5\,\text{coord}(\mathbf{u}_3, \mathcal{C}) = \text{coord}(p - 3p' + 5p'', \mathcal{C}).$$

Exercice 4.27 *CT Janvier 2013*

Soit f l'endomorphisme défini par

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}_2[t] &\to \mathbb{R}_2[t] \\ at^2 + bt + c &\mapsto (a-b)t^2 + (b-c)t + (a-c) \end{aligned}$$

1. Trouver $\mathbb{M}(f, \mathcal{B})$ la matrice associée à f quand on muni $\mathbb{R}_2[t]$ de la base $\mathcal{B} = \left\{ t^2+2, t-1, t+1 \right\}$.
2. Trouver $\dim(\text{im}(f))$ et en calculer une base.
3. Trouver $\dim(\ker(f))$ et en calculer une base.

Correction.

1. Deux méthodes :

<u>I. Méthode directe.</u> On doit écrire l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} f(t^2+2) &= t^2 - 2t - 1 = (t^2+2) + \frac{1}{2}(t-1) - \frac{5}{2}(t+1), \\ f(t-1) &= -t^2 + 2t + 1 = -(t^2+2) - \frac{1}{2}(t-1) + \frac{5}{2}(t+1), \\ f(t+1) &= -t^2 - 1 = -(t^2+2) - \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{2}(t+1), \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Méthode du changement de base. Soit $\mathcal{C} = \{ t^2, t, 1 \}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$; alors on a

$$\begin{aligned} f(t^2) &= t^2 + 1, \\ f(t) &= -t^2 + t, \\ f(1) &= -t - 1, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) &= \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} \mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \mathbb{P}^{-1}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} \mathbb{M}(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -5/2 & 5/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. $\dim(\operatorname{im}(f)) = \operatorname{rg}(\mathbb{M}(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{C})) = 2$ et une base de $\operatorname{im}(f)$ est la famille $\{ f(t^2), f(t) \} = \{ (t^2 + 2), (-t^2 + t) \}$ car elle est libre et a cardinal 2.
3. $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[t]) - \dim(\operatorname{im}(f)) = 1$ et une base de $\ker(f)$ est la famille $\{ t^2 + t + 1 \}$ car

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ at^2 + bt + c \in \mathbb{R}_2[t] \,\middle|\, f(at^2 + bt + c) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_2[t]} \right\} \\ &= \left\{ at^2 + bt + c \in \mathbb{R}_2[t] \,\middle|\, (a - b)t^2 + (b - c)t + (a - c) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_2[t]} \right\} \\ &= \left\{ at^2 + bt + c \in \mathbb{R}_2[t] \,\middle|\, (a - b) = (b - c) = (a - c) = 0 \right\} \\ &= \left\{ at^2 + at + a \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a(t^2 + t + 1) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}(\{ t^2 + t + 1 \}). \end{aligned}$$

Exercice 4.28 *CT Février 2010*

Soit $\mathbb{A}$ la matrice d'ordre 2×3 définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $\mathbb{A}$ détermine une application linéaire $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $L(\mathbf{u}) = \mathbb{A}\mathbf{u}$, où $\mathbf{u}$ est un vecteur colonne avec trois composantes.

1. Montrer que la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques est la matrice $\mathbb{A}$.
2. Trouver la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ des bases respectives :
   - ▷ $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{b}_3 = (1, 0, 0) \}$ et
   - ▷ $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1 = (1, 3), \mathbf{c}_2 = (2, 5) \}$.

Correction. Pour tout $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$L(\mathbf{n}) = \mathbb{A} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n_1 + 5n_2 - 3n_3 \\ n_1 - 4n_2 + 7n_3 \end{pmatrix}$$

.

1. Soit $\mathcal{U} = \{ \mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1) \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{V} = \{ \mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1) \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_1) &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \\ L(\mathbf{u}_2) &= 5\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2, \\ L(\mathbf{u}_3) &= -3\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

par conséquent la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques est la matrice $\mathbb{A}$.

2. Soit $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{b}_1 = (1,1,1), \mathbf{b}_2 = (1,1,0), \mathbf{b}_3 = (1,0,0) \,\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{c}_1 = (1,3), \mathbf{c}_2 = (2,5) \,\}$ une base $\mathbb{R}^2$. On écrit d'abord les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{U}$, on connait l'image par L de ces vecteurs dans la base canonique $\mathcal{V}$, on exprime alors ces images dans la base $\mathcal{C}$: comme

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \qquad \mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_1,$$
$$\mathbf{v}_1 = -5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2, \qquad \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2,$$

alors

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{b}_1) &= L(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{u}_2) + L(\mathbf{u}_3) = (2+5-3)\mathbf{v}_1 + (1-4+7)\mathbf{v}_2 \\
&= 4\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 = 4(-5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + 4(2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) = -12\mathbf{c}_1 + 8\mathbf{c}_2, \\
L(\mathbf{b}_2) &= f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{u}_2) = (2+5)\mathbf{v}_1 + (1-4)\mathbf{v}_2 \\
&= 7\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 = 7(-5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) - 3(3\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) = -44\mathbf{c}_1 + 24\mathbf{c}_2, \\
L(\mathbf{b}_3) &= L(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\
&= 2(-5\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) + (2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) = -8\mathbf{c}_1 + 5\mathbf{c}_2,
\end{aligned}$$

par conséquent la matrice associée à L quand on muni $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ des bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -12 & -44 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix}.$$

On obtient le même résultat d'après la formule du changement de base :

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}_{\mathcal{V}\to\mathcal{C}} \mathbb{A} \mathbb{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -44 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.29 *CC Novembre 2011*

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}_3[x]$. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f\colon E &\to F \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto ax^3 + bx^2 + (c-d) \end{aligned}$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Soit
$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbb{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
la base canonique de E et
$$\mathcal{F} = \{\, p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3 \,\}$$
la base canonique de F. Écrire $\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\operatorname{im}(f)$.
4. f est bijective ? Justifier.
5. Soit
$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
une famille de E. Montrer qu'elle n'est pas libre et en extraire une base qu'on notera $\mathcal{B}$.
6. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.
7. Soit
$$\mathcal{C} = \{\, q_0(x) = 1 - x, q_1(x) = x - x^2, q_2(x) = x^2 - x^3, q_3(x) = x^3 \,\}.$$
Montrer qu'elle constitue une base de F.
8. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}}$.
9. Calculer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F et vérifier que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.

Correction.

1. Pour toute matrice $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}) &= f\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}\right) \\ &= (\alpha a + \beta a')x^3 + (\alpha b + \beta b')x^2 + (\alpha c + \beta c') - (\alpha d + \beta d') \\ &= \alpha(ax^3 + bx^2 + c - d) + \beta(a'x^3 + b'x^2 + c' - d') = \alpha f(\mathbb{A}) + \beta f(\mathbb{B}). \end{aligned}$$
donc f est une application linéaire.
2. On doit écrire l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{E}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{F}$:
$$\begin{cases} f(\mathbb{E}_1) = x^3 = p_3(x), \\ f(\mathbb{E}_2) = x^2 = p_2(x), \\ f(\mathbb{E}_3) = 1 = p_0(x), \\ f(\mathbb{E}_4) = -1 = -p_0(x), \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. On commence par étudier le noyau de f :
$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{\, \mathbb{A} \in E \mid f(\mathbb{A}) = 0_F \,\} = \left\{\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in E \;\middle|\; ax^3 + bx^2 + (c - d) \equiv 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \,\right\} \\ &= \left\{\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in E \;\middle|\; a = b = c - d = 0 \,\right\} = \{\, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{smallmatrix}\right) \in E \mid c \in \mathbb{R} \,\} = \operatorname{Vect}\{\, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,\}. \end{aligned}$$
Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 1$ et une base de $\ker(f)$ est la famille $\{\, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \,\}$.
On sait que l'image d'une base est une famille génératrice de l'image de f donc
$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\{\, f(\mathbb{E}_1), f(\mathbb{E}_2), f(\mathbb{E}_3), f(\mathbb{E}_4) \,\} = \operatorname{Vect}\{\, p_3(x), p_2(x), p_0(x), -p_0(x) \,\} = \operatorname{Vect}\{\, p_3(x), p_2(x), p_0(x) \,\}.$$
Comme $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 3$, alors la famille $\{\, p_3(x), p_2(x), p_0(x) \,\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$.
4. f n'est pas bijective car elle n'est ni injective (le noyau n'est pas réduit au $\mathbf{0}_E$) ni surjective ($\operatorname{im}(f) \neq F$).
5. $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas libre car $\mathbb{B}_4 = \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2 - \mathbb{B}_3$ (attention à ne pas éliminer $\mathbb{B}_5$). On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B} = \{\, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3, \mathbb{B}_5 \,\}$ qui est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car
   5.1. $\mathbb{B}_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$,
   5.2. $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$,
   5.3. $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $a\mathbb{B}_1 + b\mathbb{B}_2 + c\mathbb{B}_3 + d\mathbb{B}_5 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $a = b = c = d = 0$.
6. On doit écrire chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{E}$:
$$\begin{cases} \mathbb{B}_1 = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_4, \\ \mathbb{B}_2 = \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3, \\ \mathbb{B}_3 = \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3, \\ \mathbb{B}_5 = \mathbb{E}_4, \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
7. $\mathcal{C}$ constitue une base de F car $\operatorname{card}(\mathcal{C}) = \dim(F)$ et les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont libres :
$$\begin{aligned} \alpha_1 q_0(x) + \alpha_2 q_1(x) + \alpha_3 q_2(x) + \alpha_4 q_3(x) = 0 &\iff (\alpha_4)x^3 + (\alpha_3 - \alpha_2)x^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)x + (\alpha_1 - \alpha_4) = 0 \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0. \end{aligned}$$
8. On doit écrire chaque élément de la base $\mathcal{F}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$. Comme c'est plus facile d'écrire chaque élément de la base $\mathcal{C}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{F}$, on écrit d'abord cette décomposition et ensuite on résout le système linéaire :
$$\begin{cases} q_0(x) = p_0(x) - p_1(x) \\ q_1(x) = p_1(x) - p_2(x) \\ q_2(x) = p_2(x) - p_3(x) \\ q_3(x) = p_3(x) \end{cases} \implies \begin{cases} p_0(x) = q_0(x) + q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) \\ p_1(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) \\ p_2(x) = q_2(x) + q_3(x) \\ p_3(x) = q_3(x) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. On doit écrire l'image par f de chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$:
$$\begin{cases} f(\mathbb{B}_1)=x^3-1=-q_0(x)-q_1(x)-q_2(x)\\ f(\mathbb{B}_2)=x^2-1=-q_0(x)-q_1(x)\\ f(\mathbb{B}_3)=x^3-1=-q_0(x)-q_1(x)-q_2(x)\\ f(\mathbb{B}_5)=-1=-q_0(x)-q_1(x)-q_2(x)-q_3(x)\end{cases} \implies \mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&0&-1&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$
Vérifions que $\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}}\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{F})\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$:
$$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}}\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{F})\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&-1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&0&-1&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

Exercice 4.30 *CC décembre 2013*

Soit $E=\left\{\,\mathbb{M}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\;\mathbb{M}=\mathbb{M}^T\,\right\}$ et $F=\mathbb{R}_2[x]$. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f\colon E&\to F\\ \begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}&\mapsto a+(b-c)x^2\end{aligned}$$

1. Soit
$$\mathcal{E}=\left\{\,\mathbb{E}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\mathbb{E}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\mathbb{E}_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\,\right\}$$
la base canonique de E et
$$\mathcal{F}=\left\{\,p_0(x)=1,p_1(x)=x,p_2(x)=x^2\,\right\}$$
la base canonique de F. Écrire $\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{F})$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{im}(f)$.
4. f est bijective ? Justifier.
5. Soit
$$\tilde{\mathcal{B}}=\left\{\,\mathbb{B}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\mathbb{B}_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\mathbb{B}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\mathbb{B}_4=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\,\right\}$$
une famille de E. Montrer qu'elle n'est pas libre et en extraire une base qu'on notera $\mathcal{B}$.
6. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.
7. Soit
$$\mathcal{Q}=\left\{\,q_0(x)=1-x,q_1(x)=1-x^2,q_2(x)=x^2\,\right\}.$$
Montrer qu'elle constitue une base de F.
8. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}\to\mathcal{F}}$.
9. Calculer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{Q}$ de F et vérifier que $\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{Q})=\mathbb{P}_{\mathcal{Q}\to\mathcal{F}}\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{F})\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.

Correction.

1. On doit écrire l'image de chaque élément de la base $\mathcal{E}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{F}$:
$$\begin{cases} f(\mathbb{E}_1)=1=p_0(x),\\ f(\mathbb{E}_2)=x^2=p_2(x),\\ f(\mathbb{E}_3)=-x^2=-p_2(x),\end{cases}\implies\begin{cases}\operatorname{coord}(f(\mathbb{E}_1),\mathcal{F})=(1,0,0),\\ \operatorname{coord}(f(\mathbb{E}_2),\mathcal{F})=(0,0,1),\\ \operatorname{coord}(f(\mathbb{E}_3),\mathcal{F})=(0,0,-1),\end{cases}\implies\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{F})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$
2. On commence par étudier le noyau de f :
$$\begin{aligned}\ker(f)&=\left\{\,\mathbb{A}\in E\mid f(\mathbb{A})=0_F\,\right\}=\left\{\,\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)\in E\;\middle|\;a+(b-c)x^2=0\ \forall x\in\mathbb{R}\,\right\}\\ &=\left\{\,\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)\in E\;\middle|\;a=b-c=0\,\right\}=\left\{\,\left(\begin{smallmatrix}0&\kappa\\\kappa&\kappa\end{smallmatrix}\right)\in E\mid\kappa\in\mathbb{R}\,\right\}=\operatorname{Vect}\left\{\,\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\,\right\}.\end{aligned}$$
Par conséquent $\dim(\ker(f))=1$ et une base de $\ker(f)$ est la famille $\left\{\,\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\,\right\}$.

3. On sait que l'image d'une base est une famille génératrice de l'image de f donc
$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ f(\mathbb{E}_1), f(\mathbb{E}_2), f(\mathbb{E}_3) \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ p_0(x), p_2(x), -p_2(x) \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ p_0(x), p_2(x) \right\}.$$
Comme $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 2$, alors la famille $\{ p_0(x), p_2(x) \}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.
4. f n'est pas bijective car elle n'est ni injective (le noyau n'est pas réduit au $\mathbf{0}_E$) ni surjective ($\mathrm{im}(f) \neq F$).
5. $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas libre car $2\mathbb{B}_4 = \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}_3$. On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B} = \{ \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3 \}$ qui est une base de E car
   (i) $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3$,
   (ii) $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$,
   (iii) $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $a\mathbb{B}_1 + b\mathbb{B}_2 + c\mathbb{B}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $a = b = c = 0$.
6. On doit écrire chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{E}$:
$$\begin{cases} \mathbb{B}_1 = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_3, \\ \mathbb{B}_2 = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2, \\ \mathbb{B}_3 = \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3, \end{cases} \implies \begin{cases} \mathrm{coord}(\mathbb{B}_1, \mathcal{E}) = (1,0,1), \\ \mathrm{coord}(\mathbb{B}_2, \mathcal{E}) = (1,1,0), \\ \mathrm{coord}(\mathbb{B}_3, \mathcal{E}) = (0,1,1), \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
7. $\mathcal{Q}$ constitue une base de F car $\mathrm{card}(\mathcal{Q}) = \dim(F)$ et les vecteurs de $\mathcal{Q}$ sont libres :
$$\begin{aligned} \alpha_0 q_0(x) + \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} &\iff (\alpha_0 + \alpha_1) + (-\alpha_0)x + (\alpha_2 - \alpha_1)x^2 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$
8. On doit écrire chaque élément de la base $\mathcal{F}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{Q}$. Comme c'est plus facile d' écrire chaque élément de la base $\mathcal{Q}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{F}$, on écrit d'abord cette décomposition et on résout le système linéaire :
$$\begin{cases} q_0(x) = p_0(x) - p_1(x) \\ q_1(x) = p_0(x) - p_2(x) \\ q_2(x) = p_2(x) \end{cases} \implies \begin{cases} p_0(x) = q_1(x) + q_2(x) \\ p_1(x) = -q_0(x) + q_1(x) + q_2(x) \\ p_2(x) = q_2(x) \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} \mathrm{coord}(p_0(x), \mathcal{Q}) = (0,1,1) \\ \mathrm{coord}(p_1(x), \mathcal{Q}) = (-1,1,1) \\ \mathrm{coord}(p_2(x), \mathcal{Q}) = (0,0,1) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{Q}\to\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
9. On doit écrire l'image de chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{Q}$:
$$\begin{cases} f(\mathbb{B}_1) = x^2 - 1 = -q_1(x) \\ f(\mathbb{B}_2) = x^2 + 1 = q_1(x) + 2q_2(x) \\ f(\mathbb{B}_3) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mathrm{coord}(f(\mathbb{B}_1), \mathcal{Q}) = (0,-1,0) \\ \mathrm{coord}(f(\mathbb{B}_2), \mathcal{Q}) = (0,1,2) \\ \mathrm{coord}(f(\mathbb{B}_3), \mathcal{Q}) = (0,0,0) \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vérifions que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{Q}) = \mathbb{P}_{\mathcal{Q}\to\mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$:
$$\mathbb{P}_{\mathcal{Q}\to\mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.31 *CT Juin 2012*

Soit $E = \left\{ \mathbb{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathbb{M} = \mathbb{M}^T \right\}$ et $F = \mathbb{R}_2[x]$. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f \colon E &\to F \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} &\mapsto ax^2 + (b - c) \end{aligned}$$

1. Soit
$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbb{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la base canonique de E et

$$\mathcal{F} = \left\{ p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2 \right\}$$

la base canonique de F. Écrire $\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{im}(f)$.
4. f est bijective ? Justifier.
5. Soit

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \mathbb{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

une famille de E. Montrer qu'elle n'est pas libre et en extraire une base qu'on notera $\mathcal{B}$.

6. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.
7. Soit

$$\mathcal{C} = \left\{ q_0(x) = 1 - x, q_1(x) = x - x^2, q_2(x) = x^2 \right\}.$$

Montrer qu'elle constitue une base de F.

8. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}}$.
9. Calculer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F et vérifier que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.

Correction.

1. On doit écrire l'image de chaque élément de la base $\mathcal{E}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{F}$:

$$\begin{cases} f(\mathbb{E}_1) = x^2 = p_2(x), \\ f(\mathbb{E}_2) = 1 = p_0(x), \\ f(\mathbb{E}_3) = -1 = -p_0(x), \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On commence par étudier le noyau de f :

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ \mathbb{A} \in E \mid f(\mathbb{A}) = 0_F \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in E \;\middle|\; ax^2 + b - c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in E \;\middle|\; a = b - c = 0 \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & c \\ c & c \end{smallmatrix}\right) \in E \mid c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 1$ et une base de $\ker(f)$ est la famille $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

3. On sait que l'image d'une base est une famille génératrice de l'image de f donc

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\left\{ f(\mathbb{E}_1), f(\mathbb{E}_2), f(\mathbb{E}_3) \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ p_2(x), p_0(x), -p_0(x) \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ p_2(x), p_0(x) \right\}.$$

Comme $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 2$, alors la famille $\left\{ p_2(x), p_0(x) \right\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$.

4. f n'est pas bijective car elle n'est ni injective (le noyau n'est pas réduit au $\mathbf{0}_E$) ni surjective ($\operatorname{im}(f) \neq F$).
5. $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas libre car $2\mathbb{B}_4 = \mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2 + \mathbb{B}_3$. On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B} = \left\{ \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3 \right\}$ qui est une base de E car
   (i) $\mathbb{B}_i \in E$ pour tout $i = 1, 2, 3$,
   (ii) $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$,
   (iii) $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $a\mathbb{B}_1 + b\mathbb{B}_2 + c\mathbb{B}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $a = b = c = 0$.
6.

$$\begin{cases} \mathbb{B}_1 = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_3, \\ \mathbb{B}_2 = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2, \\ \mathbb{B}_3 = \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3, \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. $\mathcal{C}$ constitue une base de F car $\operatorname{card}(\mathcal{C}) = \dim(F)$ et les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont libres :

$$\begin{aligned} \alpha_1 q_0(x) + \alpha_2 q_1(x) + \alpha_3 q_2(x) = 0 &\iff (\alpha_3 - \alpha_2)x^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)x + \alpha_1 = 0 \\ &\iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

8. On doit écrire chaque élément de la base $\mathcal{F}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$. Comme c'est plus facile d' écrire chaque élément de la base $\mathcal{C}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{F}$, on écrit d'abord cette décomposition et on résout le système linéaire :
$$\begin{cases} q_0(x) = p_0(x) - p_1(x) \\ q_1(x) = p_1(x) - p_2(x) \\ q_2(x) = p_2(x) \end{cases} \implies \begin{cases} p_0(x) = q_0(x) + q_1(x) + q_2(x) \\ p_1(x) = q_1(x) + q_2(x) \\ p_2(x) = q_2(x) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
9. On doit écrire l'image de chaque élément de la base $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire d'éléments de la base $\mathcal{C}$:
$$\begin{cases} f(\mathbb{B}_1) = x^2 - 1 = -q_0(x) - q_1(x) \\ f(\mathbb{B}_2) = x^2 + 1 = q_0(x) + 2q_2(x) \\ f(\mathbb{B}_3) = 0 \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vérifions que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$:
$$\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.32 *CC Novembre 2011*

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application définie par
$$\begin{aligned} f \colon E &\to F \\ p(x) &\mapsto \begin{pmatrix} p(0) & p''(2) \\ p'(1) & p'''(3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Soit $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ un polynôme de E. Écrire la matrice $f(a)$.
2. Soit
$$\mathcal{E} = \left\{ p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3 \right\}$$
la base canonique de E et
$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
la base canonique de F. Écrire $\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.
5. f est bijective ? Justifier.
6. Soit
$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ q_0(x) = 1 - x, q_1(x) = x - x^2, q_2(x) = x^2 - x^3, q_3(x) = x^3 - 1, q_4(x) = x^3 \right\}$$
une famille de E. Montrer qu'elle n'est pas libre et en extraire une base qu'on notera $\mathcal{B}$.
7. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.
8. Notons $\mathbb{C}_{i+1}(x) = f(p_i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Sans faire de calculs, expliquer pourquoi la famille $\mathcal{C} = \left\{ \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{C}_4 \right\}$ est une base de F.
9. Écrire la matrice de passage $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}}$.
10. Calculer la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F et vérifier que $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$.

Correction.

1. On a
$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 & a(0) &= a_0, \\ a'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 & a'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3, \\ a''(x) &= 2a_2 + 6a_3x & a''(2) &= 2a_2 + 12a_3, \end{aligned}$$

$$a'''(x) = 6a_3 \qquad\qquad a'''(3) = 6a_3,$$

donc

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & 2a_2 + 12a_3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 6a_3 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{cases} f(p_0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{F}_1, \\ f(p_1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{F}_3, \\ f(p_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 2\mathbb{F}_2 + 2\mathbb{F}_3, \\ f(p_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right) = 12\mathbb{F}_2 + 3\mathbb{F}_3 + 6\mathbb{F}_4, \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. On commence par étudier le noyau de f :

$$\begin{aligned} \ker(f) = \{\, p \in E \mid f(p) = \mathbb{O}_2 \,\} &= \left\{\, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in E \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_0 & 2a_2 + 12a_3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 6a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\right\} \\ &= \left\{\, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in E \;\middle|\; a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \,\right\} = \{\, \mathbf{0}_E \,\}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\dim(\ker(f)) = 0$.

4. Comme $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) = 4 = \dim(F)$, alors $\mathrm{im}(f) = F$: toute base de F est aussi une base de $\mathrm{im}(f)$, on peut alors prendre la famille $\mathcal{F}$.
5. On remarque que $\det(\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})) = \det \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{smallmatrix}\right) = -12$, donc $\mathrm{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})) = \dim(E) = \dim(F)$: f est alors bijective.
6. $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas libre car $q_3 = -q_0 - q_1 - q_2$. On en extrait par exemple la famille $\mathcal{B} = \{\, q_0, q_1, q_2, q_4 \,\}$ qui est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ car
   6.1. $q_i \in \mathbb{R}_3[x]$ pour tout $i = 0, 1, 2, 4$,
   6.2. $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}_3[x])$,
   6.3. $\mathcal{B}$ est libre car la combinaison linéaire $aq_0(x) + bq_1(x) + cq_2(x) + dq_4(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a comme unique solution $a = b = c = d = 0$.
7. On a

$$\begin{cases} q_0(x) = p_0(x) - p_1(x) \\ q_1(x) = p_1(x) - p_2(x) \\ q_2(x) = p_2(x) - p_3(x) \\ q_4(x) = p_3(x) \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Étant $\mathcal{C}$ l'image d'une base de E, elle est une famille génératrice de $\mathrm{im}(f)$. Comme le cardinal de la famille $\mathcal{C}$ est égale à la dimension de $\mathrm{im}(f)$, elle constitue une base de $\mathrm{im}(f)$. Étant donné que $\mathrm{im}(f) = F$ alors la famille $\mathcal{C}$ est une base de F.
9. On a

$$\begin{cases} \mathbb{C}_1 = f(p_0) = \mathbb{F}_1, \\ \mathbb{C}_2 = f(p_1) = \mathbb{F}_3, \\ \mathbb{C}_3 = f(p_2) = 2\mathbb{F}_2 + 2\mathbb{F}_3, \\ \mathbb{C}_4 = f(p_3) = 12\mathbb{F}_2 + 3\mathbb{F}_3 + 6\mathbb{F}_4, \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbb{F}_1 = \mathbb{C}_1, \\ \mathbb{F}_2 = -\mathbb{C}_2 + \frac{1}{2}\mathbb{C}_3, \\ \mathbb{F}_3 = \mathbb{C}_3, \\ \mathbb{F}_4 = 2\mathbb{C}_2 - \frac{3}{2}\mathbb{C}_3 + \frac{1}{6}\mathbb{C}_4, \end{cases} \implies \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

   On remarque que $\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} = (\mathbb{P}_{\mathcal{F}\to\mathcal{C}})^{-1} = (\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1}$.
10. On peut faire le calcul direct

$$\begin{cases} f(q_0) = f(p_0 - p_1) = \mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2 \\ f(q_1) = f(p_1 - p_2) = \mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_3 \\ f(q_2) = f(p_2 - p_3) = \mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_4 \\ f(q_4) = f(p_3) = \mathbb{C}_4 \end{cases} \implies \mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   ou utiliser la relation sur les changements de base :

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{F}} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = (\mathbb{P}_{\mathcal{F}\to\mathcal{C}})^{-1} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = (\mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}))^{-1} \mathbb{M}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \mathbb{P}_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}.$$

Exercice 4.33

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[t]$ définie par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_3[t] &\to \mathbb{R}_n[t] \\ p(t) &\mapsto t^2p''(t)-(t+1)p'(t)-3p(t) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[t]$.
2. Calculer le rang de f.
3. Donner une base du noyau de f.
4. Soit $a(t)$ le polynôme de $\ker(f)$ tel que le coefficient du terme de degré maximale est égale à 1. Montrer que la famille $\mathcal{B}=\left\{ f(t), f(t^2), f(t^3), a(t) \right\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[t]$.
5. Calculer $\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$ la matrice de f quand on muni l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[t]$ de la base $\mathcal{B}$ au départ et de la base canonique à l'arrivée.

Correction.

1. Pouvons que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[t]$, *i.e.* que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[t]$ dans $\mathbb{R}_3[t]$.
   ▷ Prouvons d'abord que $f(p)\in\mathbb{R}_3[t]$ pour tout $p\in\mathbb{R}_3[t]$. Sans faire de calculs, il suffit de remarquer que
   $$\deg(f(p)(t)) \le \max\left\{ \deg(t^2p''(t)), \deg((t-1)p'(t)), \deg(3p(t)) \right\} = \deg(p(t)) \le 3.$$
   Sinon, on peut calculer explicitement l'image de $p\in\mathbb{R}_3[t]$ par f : si $p\in\mathbb{R}_3[t]$, il existe a_0, a_1, a_2, $a_3\in\mathbb{R}$ tels que $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ et on obtient
   $$\begin{aligned} f(p(t)) &= t^2p''(t)-(t+1)p'(t)-3p(t) \\ &= t^2(2a_2+6a_3t)-(t+1)(a_1+2a_2t+3a_3t^2)-3(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3) \\ &= (-3a_0-a_1)+(-4a_1-2a_2)t+(-3a_2-3a_3)t^2 \in \mathbb{R}_3[t]. \end{aligned}$$
   ▷ Prouvons maintenant que f est un application linéaire. En effet, soit p et q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[t]$ et λ et μ deux réels.
   $$\begin{aligned} f(\lambda p(t)+\mu q(t)) &= t^2(\lambda p(t)+\mu q(t))''-(t+1)(\lambda p(t)+\mu q(t))'-3(\lambda p(t)+\mu q(t)) \\ &= \lambda t^2p''(t)+\mu t^2q''(t)-\lambda(t+1)p'(t)-\mu(t+1)q'(t)-\lambda 3p(t)-\mu 3q(t) \\ &= \lambda\left(t^2p''(t)-(t+1)p'(t)-3p(t)\right)+\mu\left(t^2q''(t)-(t+1)q'(t)-3q(t)\right) = \lambda f(p)+\mu f(q). \end{aligned}$$
2. Pour calculer le rang de f on peut utiliser une matrice représentative de f. Pour cela, considérons la base canonique de $\mathbb{R}_3[t]$, $\mathcal{C}=\left\{ \mathbf{c}_0(t)=1, \mathbf{c}_1(t)=t, \mathbf{c}_2(t)=t^2, \mathbf{c}_3(t)=t^3 \right\}$, et calculons l'image de chaque vecteur de cette base
   $$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_0(t)) &= t^2\mathbf{c}_0''(t)-(t+1)\mathbf{c}_0'(t)-3\mathbf{c}_0(t) = -3 = -3\mathbf{c}_0(t), \\ f(\mathbf{c}_1(t)) &= t^2\mathbf{c}_1''(t)-(t+1)\mathbf{c}_1'(t)-3\mathbf{c}_1(t) = -(t+1)-3t = -\mathbf{c}_0(t)-4\mathbf{c}_1(t), \\ f(\mathbf{c}_2(t)) &= t^2\mathbf{c}_2''(t)-(t+1)\mathbf{c}_2'(t)-3\mathbf{c}_2(t) = 2t^2-(t+1)2t-3t^2 = -2\mathbf{c}_1(t)-3\mathbf{c}_2(t), \\ f(\mathbf{c}_3(t)) &= t^2\mathbf{c}_3''(t)-(t+1)\mathbf{c}_3'(t)-3\mathbf{c}_3(t) = t^2(6t)-(t+1)(3t^2)-3t^3 = -3\mathbf{c}_2(t), \end{aligned}$$
   donc par définition la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_3[t]$ est
   $$\mathbb{M}(f,\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Clairement $\det(\mathbb{M}(f,\mathcal{C}))=0$ et $\det\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=36$ donc $\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}(\mathbb{M}(f,\mathcal{C}))=3$.
3. Comme $\dim(\operatorname{im}(f))=\operatorname{rg}(f)=3$, d'après le théorème du rang alors $\dim(\ker(f))=\dim(E)-\dim(\operatorname{im}(f))=1$: toute base du noyau ne contient qu'un vecteur (non nul).
   $$q(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t\in\ker(f) \iff \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \\ -3\kappa \\ 6\kappa \\ -6\kappa \end{pmatrix},\ \kappa\in\mathbb{R}$$
   d'où $\ker(f)=\left\{ \kappa-3\kappa t+6\kappa t^2-6\kappa t^3 \;\middle|\; \kappa\in\mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ 1-3t+6t^2-6t^3 \right\}$ et la famille $\left\{ 1-3t+6t^2-6t^3 \right\}$ est une base de $\ker(f)$.

4. $a(t)$ est alors le polynôme $a(t) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}t - t^2 + t^3$ et la famille $\mathcal{B}$ l'ensemble
$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \left\{ f(t), f(t^2), f(t^3), a(t) \right\}\\ &= \left\{ f(\mathbf{c}_1(t)), f(\mathbf{c}_2(t)), f(\mathbf{c}_3(t)), a(t) \right\}\\ &= \left\{ -\mathbf{c}_0(t) - 4\mathbf{c}_1(t), -2\mathbf{c}_1(t) - 3\mathbf{c}_2(t), -3\mathbf{c}_2(t), -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1(t) - \mathbf{c}_2(t) + \mathbf{c}_3(t) \right\}\end{aligned}$$
qui a cardinal 4. La dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}$ est égal au rang de $\mathcal{B}$. Comme
$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1/6\\ -4 & -2 & 0 & 1/2\\ 0 & -3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix} = -6$$
alors $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{B})) = 4$. On conclut alors que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[t]$.
5. Pour calculer $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ il faut calculer les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}$ de l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}$ par f (on ne change pas de base dans l'espace d'arrivée) :
$$\mathbb{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathbb{I}_4\mathbb{M}(f,\mathcal{C})\mathbb{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1/6\\ -4 & -2 & 0 & 1/2\\ 0 & -3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0\\ 16 & 14 & 6 & 0\\ 0 & 9 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 4.34

Pour $\ell \in \mathbb{R}$, soit
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ \ell & \ell & 0 & 4\\ 0 & 0 & \ell & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$
la matrice représentative d'une application linéaire $f : E \to F$ par rapport aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F.

① Calculer $\mathrm{rg}(\mathbb{A})$ en fonction de ℓ.

② Calculer les dimensions de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ en fonction de ℓ.

③ Pour $\ell = 0$ expliciter une base de $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$. Peut-on conclure que $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$?

Correction.

① Si $\ell = 0$ alors $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 2$. Si $\ell \neq 0$ alors $\det(\mathbb{A}) = \ell \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & \ell & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 2\ell^2 \neq 0$ et $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = 4$.

② $\dim(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rg}(\mathbb{A})$ et $\dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{im}(f))$. Si $\ell = 0$ alors $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$ et $\dim(\ker(f)) = 2$. Si $\ell \neq 0$ alors $\dim(\mathrm{im}(f)) = 4$ et $\dim(\ker(f)) = 0$.

③ Pour $\ell = 0$,
- ▷ $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\4\\3\\2\end{pmatrix} \right\}$, l'espace vectoriel engendré par les deux éléments de F qui ont coordonnées $(1,0,0,0)$ et $(1,4,3,2)$ dans la base $\mathcal{F}$.
- ▷ $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$, l'espace vectoriel engendré par les deux éléments de E qui ont coordonnées $(0,1,0,0)$ et $(0,0,1,0)$ dans la base $\mathcal{E}$.

On se rappelle que si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels de H, la somme de H_1 et H_2 est directe si et seulement si
$$\begin{cases} H = H_1 + H_2\\ H_1 \cap H_2 = \{ \mathbf{0}_H \}\end{cases}$$
De plus, $\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$.
Comme $\dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 4$, $\dim(\mathrm{im}(f) \cap \ker(f)) = 0$ donc $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \}$. Il suffit alors de montrer que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ est libre pour conclure que $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$. Comme $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$ alors $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

Exercice 4.35

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et F un espace vectoriel de dimension 2.

① Calculer $\dim(\mathcal{L}(E,F))$.

② Soit $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \,\}$ une base de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \,\}$ une base de $\mathcal{F}$.
Soit $G = \{\, f \in \mathcal{L}(E,F) \mid f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}_F \,\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. Calculer $\dim(G)$.

Correction.

① Fixons deux bases $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \,\}$ de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} = \{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \,\}$ de $\mathcal{F}$. Tout élément f de $\mathcal{L}(E,F)$ est tel que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{12}\mathbf{c}_2, \\ f(\mathbf{e}_2) &= a_{21}\mathbf{c}_1 + a_{22}\mathbf{c}_2, \\ f(\mathbf{e}_3) &= a_{31}\mathbf{c}_1 + a_{32}\mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

Alors, à tout élément f de $\mathcal{L}(E,F)$ on peut associer une et une seule matrice $\mathbb{M}(f,\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et viceversa (autrement dit, les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont isomorphes). Par conséquent $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})) = 6$.

② Tout élément g de G est tel que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{12}\mathbf{c}_2, \\ g(\mathbf{e}_2) &= a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{12}\mathbf{c}_2, \\ g(\mathbf{e}_3) &= 0. \end{aligned}$$

Alors, à tout élément g de G on peut associer une et une seule matrice

$$\mathbb{M}(g,\mathcal{E},\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

et viceversa. Autrement dit, les espaces vectoriels G et $\operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ sont isomorphes. Par conséquent $\dim(G) = 2$.

Exercice 4.36

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0$ mais $f^2 \neq 0$.

① Montrer qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x}, f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}) \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

② Calculer $\mathbb{M}(f,\mathcal{B})$ la matrice de f relativement à cette base. En déduire une base de $\operatorname{im}(f)$ et une base de $\ker(f)$.

③ Montrer que $\ker(f^2) = \operatorname{im}(f)$ et que $\operatorname{im}(f^2) = \ker(f)$.

Correction.

① Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \,\}$. La famille $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b}_1 = \mathbf{x}, \mathbf{b}_2 = f(\mathbf{x}), \mathbf{b}_3 = f^2(\mathbf{x}) \right\} \subset \mathbb{R}^3$ a cardinal 3. Pour prouver qu'elle est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de prouver qu'elle est libre, *i.e.* que l'équation $\alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 + \gamma\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ admet l'unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Pour cela observons que

$$\begin{cases} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = f(\alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x})) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = f^2(\alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x})) \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha\mathbf{x} + \beta f(\mathbf{x}) + \gamma f^2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f^2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \alpha f^2(\mathbf{x}) \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

② On a

$$\begin{cases} f(\mathbf{b}_1) = f(\mathbf{x}) = 0\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3 \\ f(\mathbf{b}_2) = f^2(\mathbf{x}) = 0\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + 1\mathbf{b}_3 \\ f(\mathbf{b}_3) = f^3(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \implies \mathbb{M}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

▷ $\ker(f) = \operatorname{Vect}\left\{ f^2(\mathbf{x}) \right\}$ et la famille $\left\{ f^2(\mathbf{x}) \right\}$ est une base de $\ker(f)$.

▷ $\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$ et la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$ car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

③ On a

$$\begin{cases} f^2(\mathbf{b}_1) = f(f(\mathbf{b}_1)) = f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_3 \\ f^2(\mathbf{b}_2) = f(f(\mathbf{b}_2)) = f(\mathbf{b}_3) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \\ f^2(\mathbf{b}_3) = f(f(\mathbf{b}_3)) = f(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \implies \mathbb{M}(f^2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

▷ $\ker(f^2) = \operatorname{Vect}\{\, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \,\} = \operatorname{Vect}\{\, f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}) \,\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{im}(f)$

▷ $\operatorname{im}(f^2) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect}\{\, f^2(\mathbf{x}) \,\} = \ker(f)$.

Exercice 4.37

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et f un endomorphisme de E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

① $\ker(f) = \operatorname{im}(f)$,

② $f \circ f = 0$ et $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$.

Correction.

▷ Prouvons que ① $\implies$ ② : si $\ker(f) = \operatorname{im}(f)$, d'après le théorème du rang on a $4 = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = 2\dim(\ker(f))$ d'où $\dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(f)) = 2$.
Soit $\mathbb{C} = \{\, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \,\}$ une base de $\operatorname{im}(f)$ alors il existe $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in E$ linéairement indépendantes tels que $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_1$ et $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_2$. Comme $\ker(f) = \operatorname{im}(f)$, alors $\mathbb{C}$ est aussi une base de $\ker(f)$ et donc $f(\mathbf{c}_1) = f(\mathbf{c}_2) = \mathbf{0}_E$. Autrement dit $f^2(\mathbf{b}_1) = f^2(\mathbf{b}_2) = \mathbf{0}_E$. Comme la famille $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \,\} \subset E$ est libre et a cardinal 4, elle est une base de E et $f^2(\mathbf{b}_1) = f^2(\mathbf{b}_2) = f^2(\mathbf{c}_1) = f^2(\mathbf{c}_2) = \mathbf{0}_E$, alors $f \circ f = 0$.

▷ Prouvons que ② $\implies$ ① : si $\dim(\operatorname{im}(f)) = 2$, d'après le théorème du rang on a $4 = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(\ker(f)) + 2$ d'où $\dim(\ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(f)) = 2$. Soit $\mathcal{E} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \,\}$ une base de E telle que $\{\, f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \,\}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$. Comme $f \circ f = 0$ alors $\{\, f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \,\}$ est une base de $\ker(f)$ donc $\ker(f) = \operatorname{im}(f)$.

Exercice 4.38 *CT Juin 2012*

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont les éléments sont les entiers consécutifs $1, 2, 3, \dots$ écrits l'un après l'autre, ligne après ligne :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & & & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\ker(\mathbb{A}) = \ker(\mathbb{A}^T)$.

Correction. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \ker(\mathbb{A})$ alors $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0, \\ (n+1)x_1 + (n+2)x_2 + (n+3)x_3 + \dots + (n+n)x_n = 0, \\ (2n+1)x_1 + (2n+2)x_2 + (2n+3)x_3 + \dots + (2n+n)x_n = 0, \\ \dots \\ ((n-1)n+1)x_1 + ((n-1)n+2)x_2 + ((n-1)n+3)x_3 + \dots + ((n-1)n+n)x_n = 0, \end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n=0,\\ n(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)+(x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n)=0,\\ 2n(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)+(x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n)=0,\\ \dots\\ (n-1)(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)+(x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n)=0,\end{cases}$$

et qui est équivalent au système de deux équations linéaires

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n=0,\\ x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=0.\end{cases}$$

De la même manière, si $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\ker(\mathbb{A}^T)$ alors $\mathbb{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases}x_1+(n+1)x_2+(2n+1)x_3+\dots+((n-1)n+1)x_n=0,\\ 2x_1+(n+2)x_2+(2n+2)x_3+\dots+((n-1)n+2)x_n=0,\\ 3x_1+(n+3)x_2+(2n+3)x_3+\dots+((n-1)n+3)x_n=0,\\ \dots\\ nx_1+(n+n)x_2+(2n+n)x_3+\dots+((n-1)n+n)x_n=0,\end{cases}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\begin{cases}(nx_2+2nx_3+\dots+(n-1)nx_n)+(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)=0,\\ (nx_2+2nx_3+\dots+(n-1)nx_n)+2(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)=0,\\ (nx_2+2nx_3+\dots+(n-1)nx_n)+3(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)=0,\\ \dots\\ (nx_2+2nx_3+\dots+(n-1)nx_n)+n(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)=0,\end{cases}$$

et qui est équivalent au système de deux équations linéaires

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=0, & (L_1\leftarrow L_2-L_1)\\ x_2+2x_3+\dots+(n-1)x_n=0, & \left(L_2\leftarrow \frac{kL_1-L_k}{n(k-1)},\ k=2,\dots,n\right)\end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=0,\\ x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n=0, \quad (L_2\leftarrow L_2+L_1).\end{cases}$$

Par conséquent $\ker(\mathbb{A})=\ker(\mathbb{A}^T)$.

Exercice 4.39 *CT Juin 2012*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R}_n[x]\\ p &\mapsto q(p)+r(p)\end{aligned}$$

où $q(p)$ est le quotient de la division de $p(x)$ par x et $r(p)$ est le reste de la division de $p(x)$ par x^n.

1. Soit $\mathcal{C}=\left\{1,x,x^2,\dots,x^n\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. Donner $\mathbb{M}(f,\mathcal{C})$ la matrice associée à l'endomorphisme f quand on muni l'espace $\mathbb{R}_n[x]$ de la base $\mathcal{C}$.
2. Calculer $\mathrm{rg}(f)$.

Correction.

1. On a
$$\begin{cases} f(1)=1\\ f(x)=1+x\\ f(x^2)=x+x^2\\ f(x^3)=x^2+x^3\\ \vdots\\ f(x^{n-1})=x^{n-2}+x^{n-1}\\ f(x^n)=x^{n-1}\end{cases}$$
par conséquent la matrice $\mathbb{M}(f,\mathcal{C})$ de dimension $(n+1)\times(n+1)$ est
$$\mathbb{M}(f,\mathcal{C})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. $\det(\mathbb{M}(f,\mathcal{C}))=0$ et en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne on a une matrice carrée d'ordre n triangulaire supérieur dont le déterminant vaut 1, par conséquent $\operatorname{rg}(f)=\operatorname{rg}(\mathbb{M}(f,\mathcal{C}))=n$.