Université du Sud Toulon-Var **Licence L2-PC et Si**
M33 **2017-18**

Feuille d'exercises 2- espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. (Compréhension du cours) Rappeler la définition d'un espace vectoriel V. Pour $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, interpréter la définition de façon grapique. Interpréter de façon graphique les sous-espaces vectioriels de $V = \mathbb{R}^2$, et $V = \mathbb{R}^3$. Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $V = \mathbb{R}^2$ et $V = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 4y\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 4y + 5\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 4y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 0\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 4y\} + \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 0\}$
5. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, xy = 1\}$
6. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, xy = 0\}$

Remarque. Si A et B sont des sous-ensembles d'un espace vectoriel E, $A+B$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $a + b$ où $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 3. Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x + 4y + z \geq 0\}$
2. $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x + 4y + z = 1\}$
3. $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x + 4y + z = 0\}$
4. $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x + 4y + z = 0\} + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x = y = 0\}$
5. Montrer que $K = \mathbb{R}^3$

Exercice 4. (a) Montrer que $\mathbb{R}^4$ (avec les opérations usuelles) est un espace vectoriel.

(b) Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. $L = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 |\, x = 4y\}$
2. $M = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 |\, x - 4y + z + u = 0\}$
3. $N = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 |\, x - 4y + z + u = 0\} \cup \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 |\, x = 0\}$

4. $O = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 |\, x + 4y + z = 0\} + \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 |\, x = y = z = 0\}$.
5. Montrer que $O \neq \mathbb{R}^4$

Exercice 5. (a) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel.

(b) Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. $\mathcal{R}_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] |\, P(3) = 0\}$
2. $\mathcal{R}_b = \{P \in \mathbb{R}_n[X] |\, \deg(P) = n\}$
3. $\mathcal{R}_c = \{P \in \mathbb{R}_n[X] |\, P(X) = 1 + \alpha X, \alpha \in \mathbb{R}\}$
4. $\mathcal{R}_d = \{P \in \mathbb{R}_n[X] |\, P(X) \text{ n'a pas de terme constant}\}$

Exercice 6. (a) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni des opérations suivantes :

$$\begin{array}{rll} f+g: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto f(x)+g(x) \\ \lambda f: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \lambda f(x) \end{array}$$

pour $f, g \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

(b) Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$.

1. $\mathcal{F}_a = \{f \in \mathcal{F} |\, f \text{ est continue }\}$
2. $\mathcal{F}_b = \{f \in \mathcal{F} |\, f \text{ est croissante }\}$
3. $\mathcal{F}_c = \{f \in \mathcal{F} |\, f \text{ est paire }\}$
4. $\mathcal{F}_d = \{f \in \mathcal{F} |\, f(1) = 0\}$
5. $\mathcal{F}_e = \{f \in \mathcal{F} |\, f(0) = 1\}$
6. $\mathcal{F}_f = \{f \in \mathcal{F} |\, f(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}\}$.
7. $\mathcal{F}_g = \{f \in \mathcal{F} |\, f \text{ n'est pas continue}\}$

Exercice 7. (a) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriels sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriels sur $\mathbb{C}$.

(c) $\mathbb{R}^2$ est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

(d) Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$.

1. $P = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 |\, z + w = 0\}$
2. $Q = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 |\, iz + w = 0\}$
3. $R = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 |\, \mathrm{Re}(z + w) = 0\}$

(e) Même question, mais en considérant $\mathbb{C}^2$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.