Université du Sud Toulon-Var — **Licence L2-PC et Si**
M33 — **2017-18**

Feuille d'exercises 3-familles génératrices et libres - sous espaces vectoriels engendrés

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^4$ une famille de 4 vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) linéairement indépendentes. Les familles uisvantes sont elles libres ?
1.$(u_1, 2u_2, u_3)$,
2. (u_1, u_3),
3.$(u_1, 2u_1 + u_4, u_4)$,
4.$(2u_1 + u_2, u_1 - 3u_2, u_4, u_2 - u_1)$.

Exercice 2

Montrer que les familles suivantes sont linéairement dépendentes, et écrire la relation entre les vecteurs. Écrire l'espace vectoriel engendré par ces familles.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{3} \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exercice 3 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Peut-on déterminer λ, μ tels que

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}?$$

Et pour que

$$\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\\\mu\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}?$$

Exercice 4 Les vecteurs suivates forment-il un base de $\mathbb{R}^3$? Sinon décrire le sous-espace qu'il engendrent.

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\8\\13\end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\10\\-11\end{pmatrix}$

Exercice 5

1.Les vecteurs suivantes forment-ils une base de $\mathbb{C}^3$?

$\begin{pmatrix}1\\-1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\i\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}i\\-1\\-1\end{pmatrix}.$

2. Calculer les composantes de $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\i\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 6

Donner une base du sous-espace $W \subset \mathbb{R}^4$ défini par :

$$W := \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Exercice 7

On considère dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, u_4 =$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soient E l'espace vectoriel engendré par u_1, u_2, u_3 et F celui engendré par u_4, u_5. Calculer les dimensions respectives de E, F, $E \cap F$, $E + F$.

Exercice 8

Soit $E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x + y = z + t\}$.
Déterminer $dim E$, $dim F$, $dim(E + F)$, $dim E \cap F$.