Série 4 – Applications linéaires, noyeau et image

Exercice 1. Montrer que les applications suivantes NE sont PAS linéaires

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f_1(x) = x^3$;

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_2(x, y) = x + y + 1$;

$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_3(x, y, z) = (x + y, z + 1)$;

$f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f_4(x, y, z, t) = (x + y, z, e^t)$;

$f_5 : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ donnée par $f_5(P) = P(1)P(2)X + P(3)P(4)X^2$.

Exercice 2. Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Calculer le noyeau, l'image ainsi que le rang et la nullité de chacune d'entre elles.

$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_1(x, y, z) = x + 2y$;

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_2(x, y, z) = 7x + 2y + 7$;

$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_3(x, y, z) = (x + y, 0)$;

$f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f_4(x, y, z, t) = (x + y, x, t + z)$;

$f_5 : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ donnée par $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \mapsto a_0X + a_1X^2$;

$f_6 : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ donnée par $f_6(P) = P'$ où P' est le polynôme derivé.

Exercice 3. Etablir si les espaces vectoriels suivants sont isomorphes

$\mathbb{R}_3$ et $\mathbb{R}_2[X]$;

$\mathbb{C}_3$ et $\mathbb{C}_2[X]$;

$\mathbb{R}^2$ et $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 4y + z = 0\}$;

$\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{lin}(\{X, X^4, X^7 + 2) \subset \mathbb{R}_7[X]$;

$\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{lin}(\{X^4, X^7 + 2) \subset \mathbb{R}_{12}[X]$;

$\mathbb{C}$ comme espace vectioriel sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;

$\mathbb{C}$ comme espace vectioriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;

$\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Ker}(f_3)$ où f_3 est donnée dans l'exercice 2 ;

$\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Ker}(f_5)$ où f_5 est donnée dans l'exercice 2.

Exercice 4. Soit $M(2, \mathbb{R})$ l'ensemble de matrices réelles 2×2.

1. Montrer que $M(2, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
2. Calculer sa dimension.
3. Montrer que pour tout $A \in M(2, \mathbb{R})$ l'application $f_A : M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R})$ définie par $X \mapsto AX$ est linéare.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f_A)$ et $\mathrm{Ran}(f_A)$.

Exercice 5. On considère l'application D définie par

$$C^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f'' \in C(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que D est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Ran}(D)$.

Exercice 6. Soit E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

1. Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel réel $C(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application f qui à $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ associe la solution satisfaisant les conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = b$ est linéaire.
3. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et à la base $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$ de E.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ran}(f)$.