Université du Sud Toulon-Var **Licence L2-PC et Si**
M33 **2018-19**

Feuille d'exercises 5

Matrices representatives et déterminants et rang

Note pour C.A. : cet exo dépend de comment on a résolu les exos de la feuille précendente.

Exercice 1

Caluculer la matrice répresentative par rapport aux bases canoniques de chacune des applications suivantes. Si la matrice est carré, calculer son déterminant. Déterminer Ker et Im à travers matrice répresentative. Comparer avec exercice 2 de la feullle 4.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x + 2y$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 7x + 2y + 7$
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix})$;
4. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x+y \\ x \\ t+z \end{pmatrix})$;
5. $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui associe à $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ $f(P) = a_0X + a_1X^2$;
6. $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ $f(P) = P'$ où P' est le polynôme derivé.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$ l'application donnée par $f(P) = X \cdot P$. Montrer que f est injective mais pas surjective.

Écrire sa matrice répresentative dans la base canonique et déterminer son rang. Que peut-on conclure sur $Kerf$, Imf ? Déterminer les espace $Kerf$ et Imf ainsi que un base.

Exercice 3 Calculer le déterminant et le rang de matrice suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 9 & 15 \\ -5 & 11 & 14 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

Que peut-on conclure sur les applications linéaires associée à A, B, C ? (inversibilité, dim Im, dim Ker, etc)
Que peut-on conclure sur le nombre se solution de systèmes linéaires homogènes associées à A, B, C ?

Exercice 4 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, et soit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ où $\beta \in \mathbb{R}$ est un paramètre. On note par f_A l'application linéaire associé à A.

1. Quel est le rang de la matrice A ?
2. déterminer Imf_A de la façon plus explicite possible.
3. déterminer le nombre de solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ suivant la valeur de A.

Exercice 5 On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de matrices M et R.
2. Sans effectuer le produit $A = M \times R$, déterminer le rang de la matrice A.
3. Changer un seul élément de la matrice R pour augmenter le rang de A.