UNIVERSITÉ DE TOULON

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

L2 PC & L2 SI
(2019-2020)

MP-33 Algèbre linéaire

Cours :
Annalisa Panati *email :* annalisa.panati@univ-tln.fr
page web : http ://panati.univ-tln.fr

Ces notes ont la fonction de résumer les parties plus difficiles du cours comme aide à la révision pour l'examen finale.
Elle couvrent surtout la dérnière partie du cours.

Elles indiquent des références pour certaines parties, et resument les explication des autres.
Pour les définition de base, le produit entre matices et le calcul du déterminant, on pourra faire référence au polycopié de Mme Faccanoni, dont le lien est sur cette page web (voir la prémiere section).

Je rappele que pour l'examen finale vous aurez droit à une feuille A4 recto-verso manuscrite, mais PAS de calculette.

1 Références et commentaires

On fera réference au polycopié de Mme Faccanoni pour

— définition d'espace vectoriel, sous-espace vectoriels, somme et somme directe.
— familles libres et génératrices, bases, dimension d'un espace vectoriel, espace linéaire engendré ;
— produit entre matrices ;
— défintion et calcul du déterminant (chapitre 1. Voir aussi les exemples) **Attention :** Mme Faccanoni explique aussi la régle de Sarrus pour le calcul du déterminant de matrices d'ordre 3x3. *Cela n'est pas la définition*, mais juste une régle de calcul qui marche **seulement pour le matrices 3x 3**. Je n'encourage pas les étudiants à apprendre la régle de Sarrus, car elle n'est ni plus simple, ni conceptuellement plus claire que le calcul direct. Cependant, elle est correcte, et si l'on souhaite, on pourra l' utliser à l'exam.

2 Bases

Soit E une espace vectoriel et soit $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ une base de E. Alors on peut écrire chaque élément de $\underline{v} \in E$ **de façon unique** comme comme combinason linéaire des éléments de la base, cet à dire il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \ldots + \lambda_n \underline{e}_n)$$

2.1 Applications linéaires

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels.

Définition 2.1 *On dit que f est lineaire* si et seulement si

$$f(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = \lambda f(\underline{u}) + \mu f(\underline{v}), \text{ pour tout } \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}, \text{et pour tout } \lambda \in \mathbb{K}$$

Intuitivement, une application linéaire "preserve" la structure de la somme et du produit par un scalaire. Cela sera mieux expliqué dans la section **??**

On donne le defintion suivantes :

$$Imf := \{\underline{v} \in F| \ il \ existe \ \underline{u} \in Etel \ que \ \underline{v} = f(\underline{u})\} Kerf := f^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{u} \in E | f(\underline{u}) = \underline{0}\}$$

Ces deux ensembles sont définis pour toute fonction f (sauf que le nom $Kerf$ est utilisé que pour les applications linéaires) . Cependant, si f est linéaire, ils ont des propriétés de plus :

Proposition 2.2 *Si $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels E, F, alors*

1. $\mathrm{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E ;*
2. $\mathrm{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Le fait suivant est facile à prouver. Soit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ une base de E.

$$\mathrm{Im} f = Vect f(\underline{e}_1), f(e_2), \ldots, f(\underline{e}_n).$$

Puisque $\mathrm{Im} f$ est un espace engendré par n vecteurs, sa dimension ne peut pas exceder $n = \dim E$.
On remarque aussi que En suivant cette idée, il est possible de prouver le théorème suivant.

Theorem 2.3 (du Rang) *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Alors*

$$\dim Kerf + \dim \mathrm{Im} f = \dim E.$$

Remarque : Le nom "rang" vient du fait que $\dim \mathrm{Im} f$ est égale au rang d'une matrice associé. Pour cette raison, dans certains textes, $\dim \mathrm{Im} f$ est aussi appelé *rang* de f et $\mathrm{Im} f$ est noté $\mathrm{Ran} f$. Dans ce cours, on a fait le choix d'utliser le mot "rang" seulement pour le rang d'une matrice.

Pour voir les importantes consequences du Théorème du rang, on doit rappeler d'abord quelques défintions.

Définition 2.4 *Soit $f : E \to F$ une fonction.*
On dit que f est injective *si et seulement si chaque élement admet **au plus** un antecedent.*
On dit que f est surjective *si et seulement si chaque élement admet **au moins** un antecedent.*
On dit que f est bijective *si et seulement elle est injective et surjective.*

Remarque : celles-ci sont les mêmes défintions vues la prémière année (cours M11 et MP21).

Bien évidement, et indépendement du fait que f soit linéaire

$$f \text{ est surjective } ssi \ \mathrm{Im} f = F.$$

Par contre, si f est linéaire, on a des propriété intéressantes pour l'injectivité. On prove facilement (faire en exercice) que :

Proposition 2.5 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E, F.*

1. *si le vecteur $\underline{v} \in F$ admet un antecendent $\underline{w} \in E$, alors l'esemble de tous les antecedents de $\underline{v}$, noté $f^{-1}(\underline{v})$, est donée par*

$$f^{-1}(\underline{v}) = \underline{w} + \mathrm{Ker} f$$

2. *en particulier*

$$f \textit{ est injective } \text{ssi } \mathrm{Ker} f = \{\underline{0}\}.$$

Voici quelque conséquences du Théorème du rang et de la Prop. .
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E, F.

1. si $\dim E > \dim F$, f ne peut pas être injective ;
2. si $\dim E < \dim F$, f ne peut pas être surjective ;
3. si $\dim E = \dim F$, f est surjective *si et seulement si* f est injective *si et seulement si* f est s bijective.

2.2 Applications linéaires entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$

On regarde maintenant le cas particulier de $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$.

On considère donc les application linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Leur structure est écrite par la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Alors il existe une matrice $A \in M(nxm)$ (n-colonnes, m lingnes) telle que*

$$f(\underline{u}) = A\underline{u}.$$

En d'autres termes, on a forcement $f = f_A$ où

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \underline{u} \to A\underline{u} & & \end{array}$$

C'est facile de construire la matrice A en connaissant f. Soit $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ la base canonique

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathbb{R}^n$.

Chaque élément de $\underline{v} \in E$ de façon unique comme comme combinason linéaire des éléments de la base, c'est à dire il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \ldots + \lambda_n \underline{e}_n$$

Pour la base canonique on a clairement que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = \underline{v}.$$

Or puisque f est linéaire, on a

$$f(\underline{u}) = f(\lambda_1 \underline{e}_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \ldots + \lambda_n \underline{e}_n) = \lambda_1 f(\underline{e}_1) + \lambda_2 f(\underline{e}_2) \ldots + \lambda_n f(\underline{e}_n)$$

. **En d'autre termes, une application linéaire f est complétément déterminé par les images des vecteurs de la base**.

Rappel Avec cette observation, on peut voir facilement que alors

A doit être un matrice dont les colonnes sont $f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \ldots f(\underline{e}_n$ (dans l'ordre).

On notera

$$A = \left(f(\underline{e}_1) | f(\underline{e}_2) | \ldots | f(\underline{e}_n) \right).$$

Remarque : ces observations impliquent que l'espace image $\mathrm{Im} f$ est l'espace engendré par le colonnes de la matrice, c'est à dire

$$\mathrm{Im} f = Vect\{f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \ldots, f(\underline{e}_n)\} = Vect\{ \textit{ colonnes de la matrice } A\}.$$

Donc :

$$\dim \mathrm{Im} f = \text{nombre de } \textit{colonnes libre} \text{ dans la matrice } A\}.$$

On rappele que pour la défintion du déterminant, on fera réference au polycopié de Mme Faccanoni, voir sect. 1. On rappele ici la défintion du rang d'une matrice rangA.

Définition 2.7 *Soit A une matrice. On appelle rang de A, noté* rangA*, l'* ordre de la plus petite sous-matrice dont le déterminat est different de zero*.*

On peut prover le fait suivant :

Proposition 2.8 *Soit A une matrice* rangA $=$ *nombre de colonnes libres de A.*

Les deux propostions suivantes nous permettent de lier $\det A$ et rangA au propriétés de f_A.

La prémière est une consequence directe de la prop. 2.8, elle est valable pour **toute** matrice A.

Proposition 2.9 *Soit $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire donnée par $f(\underline{u}) = A\underline{u}$. Alors*

1. $\mathrm{rangA} = \dim \mathrm{Imf_A}$.
2. $\underline{b} \in \mathrm{Im} f_A$ ssi $\mathrm{rang(A|\underline{b})} = \mathrm{rangA}$

où $(A|\underline{b})$ est la matrice construite en ajoutant $\underline{b}$ comme dérnière colonne).

La deuxième propostion concerne **seulement les matices carrées** nxn.

Proposition 2.10 *Soit $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire donnée par $f(\underline{u}) = A\underline{u}$. Alors*

$$f_A \textit{ est bijective } \text{ssi } \det A \neq 0.$$

2.3 Systèmes linéaires, détérminant et rang

On considère maintenat des systèmes lineaires n inconnues et m equation du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

On peut écrire le système sous la forme suivante :

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m.$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}x_2 & \ldots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n} \\ & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

On régarde le système d'un point de vue different grâce à la remarque suivante :

chercher les solutions du système $A\underline{x} = \underline{b}$ est équivalent à chercher les antecendents de b par rapport à l'application linéaire $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $A\underline{x} = \underline{b}$.

On traduit donc les résultats de la section précendente en termes de solution de systèmes. On considère système $A\underline{x} = \underline{b}$.

— le système admet au moins une solution *ssi* $\underline{b}$ admet un antecedent *ssi* $\underline{b} \in \mathrm{Im} f$ *ssi* $\mathrm{rang}(\mathrm{A}|\underline{\mathrm{b}}) = \mathrm{rang} \mathrm{A}$;

— si $\underline{b}$ admet au moins un antécendent $\underline{w}$, alors l'ensemble antecedent est donné par $\underline{w} + \mathrm{Ker} f_A$; donc si le système admet au moins une solution $\underline{w}$, alors l'ensemble des solutions est donné par $\underline{w} + \mathrm{Ker} f_A$; en particulier si $\mathrm{Ker} f_A = \{\underline{0}\}$, c'est à dire f_A injective **la solution, si elle existe, elle est unique**.

A cause du Théoreme du rang, on a aussi :

1. si $n > m$, f_A ne peut pas être injective ; donc, pour un système avec plus d'inconnues que équations, si une solution existe elle n'est pas unique.

2. si $n < m$, f_A ne peut pas être surjective ; donc, pour un système avec plus d'équations que inconnues, il y a de choix de $\underline{b}$ pour lequel le système n'as pas de solutions.
3. si $n = m$, f est surjective *si et seulement si* f_A est injective *si et seulement si* f est bijective *ssi* $detA \neq 0$. Donc si $detA \neq 0$, le système admet une et une seule solution pour toute choix de $\underline{b}$.

2.4 Isomorphismes, idéntification avec $\mathbb{R}^n$ et matrice représentatitive

L'étude des applications linéaires entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ est très important car **toute application linéaire** peut être identifié avec une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ à travers la matrice répresentative.

Commençons par comprédre que **tout espace vectoriel** E **peut être identifié avec** $\mathbb{R}^n$ où $n = \dim E$.

On a rappelé dans la section 2 que si on donne une base$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ de E on peut écrire chaque élément de $\underline{v} \in E$ **de façon unique** comme comme combinason linéaire des éléments de la base, c'est à dire il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$\underline{v} = \lambda_1\underline{e}_1 + \lambda_2\underline{e}_2 \ldots + \lambda_n\underline{e}_n)$$

En d'autre termes, l'application lineaire

$$\begin{array}{rcl} j : E & \to & \mathbb{R}^n \\ \underline{v} & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

est une application **bijective**. On vérifie facilement que elle est aussi **linéaire**. Elle est donc une correspondance qui mets les éléments en correspondance un-un et *qui respecte la structure de l'espace vectoriel.* Cela *nous permet d'identifier* E *et* $\mathbb{R}^n$. L'image sujacente est que "on change de nom" aux éléments de E, mais la structure reste la même. C'est une opération mentale que on fait souvent, par exemple quand ont "identifie" deux statues

qui ont la même forme mais sont d'un materiale différent, nous disons que "c'est la même."
Pour cette raison j est appelé **isomorphisme** (du grec : iso= la même, morphe : forme).

Définition 2.11 *Soit E, F deux espaces vectoriels. Un applicatoin linéaire bijective $j : E \to F$ est appelée* isomorphisme*.*
On dit que deux espaces sont isomorphes *s'il existe un isomorphisme entre E et F.*

Remarque : deux espaces sont isomorphes *ssi* ils ont la même dimension. S'il sont isomorphes, il existe un infinité d'isomorphismes.

Supposons d'avoir choisi une base $\mathcal{E}$ pour E et une $\mathcal{F}$ pour F. On peut donc identifier E avec $\mathbb{R}^n$ à travers j (avec la construction en haut), et, de la même façon, identifier F avec $\mathbb{R}^m$.
Avec cette identification on obtient le schema suivaint :

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \to & F \\ & j\downarrow & & j'\downarrow \\ h & R^n & \to & \mathbb{R}^m \end{array}$$

L'application h entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est obtenue par composition, elle est donc $h = j' \circ f \circ j^{-1}$ (qui agit sur $\underline{x}$ comme $jfj^{-1}(\underline{x})$).

Cette application est une application entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ donc elle doit forcement être représenté par une matrice M_f, c'est à dire $h(\underline{x}) = M_f\underline{x}$.

Définition 2.12 *On appele la matrice M_f matrice representative de l'application f par rapport à la base $\mathcal{E}$ au départ et $\mathcal{F}$ à l'arrivée.*

La matrice M_f doit avoir la forme suivante :

$$M_f = \big([j'(f(\underline{e}_1))|j'(f(\underline{e}_1)|\ldots|j'(f(\underline{e}_n)]\big)$$

c'est à dire ces colonnes sont $j'(f(\underline{e}_j)$, $j = 1, \ldots, n$. La matrice M_f a donc n colonnes et m lignes.

Remarque : Nous avons utilsé des isomorphismes, donc toute la structure de f est identique a celle de h. En particulier :

$$j(\mathrm{Ker} f) = \mathrm{Ker} h, \quad æ'(\mathrm{Im} f(= \mathrm{Im} h$$