CORRIGÉ DM1 2017

1. Déterminer si les suites suivantes sont convergentes et établir leur limite (à partir de la définition ou en utilisant Cauchy ou d'autres propositions vue au cours).

1. $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

On doit prouver que:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ tel que $\forall n > M_\varepsilon$, $|U_n| < \varepsilon$.

Dans ce cas, $|U_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ si $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc il suffit de choisir $M_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$. Donc u_n converge vers 0.

Remarque de rédaction : si on a déjà trouvé M_ε à part, on peut écrire directement : si $n > \frac{1}{\varepsilon}$, alors $|U_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc U_n converge vers 0.

2. $U_n = \frac{1}{n^3}$.

On doit prouver que:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ tel que $\forall n > M_\varepsilon$, $|U_n| < \varepsilon$.

Dans ce cas, $|U_n| = \left|\frac{1}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3} < \varepsilon$ si $n > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}$. Donc il suffit de choisir $M_\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}$. Donc u_n converge vers 0.

3. $U_n = \sin(n)$

correction à part la suite

4. $U_n = \frac{(-1)^n(n^3 + n^2 + \pi)}{\ln n}$

On remarque que $u_{2n} \to +\infty$ pour $n \to +\infty$.

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3}{\ln n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{\ln n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi}{\ln(n)} = 0$ (admis).

De plus, $u_{2n+1} = -U_{2n} \to -\infty$ pour $n \to -\infty$.

Donc il existe deux sous-suites qui convergent vers des valeurs différentes.

Cela implique $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \nexists$, donc u_n diverge.

5. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On utilise le critère de Cauchy.

Soit $u_p = u_n$ et $u_q = u_{2n}$

Donc $|u_q - u_p| = \left|\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| > \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}\right| = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Cela contredit le critère de Cauchy, donc la suite diverge.

De plus on peut remarquer que u_n est strictement croissante, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{k}$.

On utise Cauchy. On veut trouver M_ε tel que $\forall p,q > M_\varepsilon$ $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

On considère $|u_p - u_q|$. Sans perte de généralité, on peut supposer $p > q$.

$|u_p - u_q| = \left|\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=q}^{p} \frac{(-1)^k}{n}\right| < \frac{1}{q}$. (1)

Donc il suffit de choisir $M_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, pour avoir $|u_p - u_q| < \frac{1}{q} \le \varepsilon$. Donc u_n converge.

---

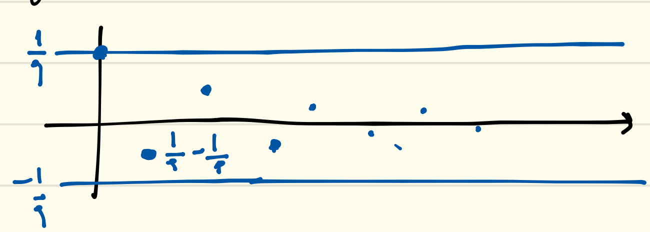
(1)

Si $q = 2k$, $p = 2m+1$ (c.à.d. q pair, p impair).

$\sum_{k=q}^{p} \frac{1}{k} = \frac{1}{q} + \underbrace{\left(-\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{q+3} + \frac{1}{q+4}\right)}_{<0} + \cdots + \underbrace{\left(-\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p}\right)}_{<0}$.

sans perte de généralité $q = 2n$ (sinon il suffit de multiplier tout par -1, cela ne change rien vu qu'on regarde la valeur absolue.

Graphiquement on voit



Exercise 2

Soit u_n une suite réele ou complexe.

(i) Par définition $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \overset{\text{déf}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ tel que $\forall n > n_\varepsilon$
$\big||u_n|\big| < \varepsilon$.

Or $\big||u_n|\big| < \varepsilon \iff |u_n| < \varepsilon$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

si on remplace 0 par un autre nombre réel la proposition n'est plus vraie.

exemple:

Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Soit $u_n = (-1)^n a$. On a: $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = a$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \nexists$.

(ii) Par le critère de Cauchy

$$w_n := \sum_{k=1}^{n} |u_n| \text{ converge} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.q. } \forall p,q > n_\varepsilon, \ |w_p - w_q| < \varepsilon.$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.q. } \forall p,q > n_\varepsilon, \ \Big|\sum_{k=q}^{p} |u_k|\Big| < \varepsilon.$$

$$\text{Or } \varepsilon > \Big|\sum_{k=q}^{p} |u_k|\Big| \geq \Big|\sum_{k=q}^{p} u_k\Big|.$$

$$\text{Donc } w_n \text{ converge} \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ t.q. } \forall p,q > n_\varepsilon, \ \Big|\sum_{k=q}^{p} u_k\Big| < \varepsilon$$
$$\iff v_n := \sum_{k=1}^{n} u_n \text{ converge.}$$

L'inverse n'est pas vrai, par exemple la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{k}$ converge.
mais $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

Exercice 3.

(i) Méthode I :

On utilse le propriété suivantes :

Soit $\lim_{n\to+\infty} u_n =: \alpha$ Alors : $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^m = \alpha^m$

$\lim_{n\to+\infty} c\, u_n = c\alpha$. (Voir le cours pour le preuves)

Donc on a $\lim_{n\to+\infty} P(u_n) = P(\alpha)$.

remarque : j'aurais aimé qu'on prouve le propriétés à partir de la définition mais en effet c'était pas specifié dans le texte.

Methode II : puis que les polynômes sont continus, (i) est un cas particulier de (ii).

(ii) Soit $l := \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Donc $\forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon > 0$ tel que $\forall n > M_\varepsilon$, $|u_n - l| < \varepsilon$.

f continue en $l \underset{\text{déf}}{\iff} \forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists \delta > 0$ telle que

si $|x - l| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \tilde{\varepsilon}$.

En combinant les deux affirmations, on obtient :

Si $n > M_\delta \Rightarrow |u_n - l| < \delta \Rightarrow |f(u_n) - f(l)| < \tilde{\varepsilon}$

$\Rightarrow \forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists M_{\tilde{\varepsilon}}$ tq $\forall n > M_{\tilde{\varepsilon}}$ ici $M_{\tilde{\varepsilon}} = M_\delta$

$|f(u_n) - f(l)| < \tilde{\varepsilon}$

$\underset{\text{déf}}{\iff} \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

Remarque : Dans l'exercice 4, on aura besoin de la même propriété avec u_n divergente et $u_n \to \pm\infty$.

Exercise 4.

(i) Si la suite u_n converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

On doit avoir

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \text{ grâce à l'exercice 3.}$$
$$= f(\ell)$$

Donc $f(\ell) = \ell$

Si $u_n \to \pm\infty$. on a toujours que $\pm\infty = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$

On doit prouver que la proposition $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$

est vrai aussi pour des suites divergentes telles que $u_n \to \pm\infty$

(ici on interprète $f(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

Supposons d'abord $u_n \to +\infty$

donc $\forall P>0\ \exists M_P$ t.q. $\forall n > M_P \quad u_n > P$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \forall \tilde{\varepsilon}, \exists P_{\tilde{\varepsilon}}$ si $x > P_{\tilde{\varepsilon}}$, alors $|f(x) - \ell| < \tilde{\varepsilon}$.

dans ce cas, si $n > M_{P_{\tilde{\varepsilon}}}$, alors $|f(u_n) - \ell| < \tilde{\varepsilon}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \forall R>0\ \exists P_R$ tq si $x > P_R$ alors $f(x) > P$ (ou $f(x) < -P$)

dans ce cas, si $n > M_{P_R}$ alors $f(u_n) > P$ (ou $f(x) < -P$)

Donc la proposition

$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$ est vraie aussi dans ces cas.

donc on peut conclure que formellement on doit avoir $f(\pm\infty) = \pm\infty$.