Corrigé contrôle en classe 24 Avril

Exercice 1

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x \cos x}{x} & x \geq 1, \\ e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)} \cos x & \text{pour } -1 < x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{pour } x \leq -1 . \end{cases}$$

1. Continuité

On remarque que $e^x, \cos x, \sin x, \frac{\pi}{2}x, x^2-1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (admis); $\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car quotient de 1 et x, $x \neq 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\sqrt{x}$ est continue sur son domaine de définition $[0, +\infty[$.

Donc

pour $x > 1$, f est produit des fonctions $e^x, \cos x, \frac{1}{x}$ qui sont continues sur $]1, +\infty[$.

donc f continue sur $]1, +\infty[$,

pour $-1 < x < 1$, f est composition et produit des fonctions continues sur $]-1, 1[$,

donc f est continue sur $]-1, 1[$.

pour $x < 1$, f est composition de $x^2 - 1$ et $\sqrt{x}$. On remarque que si $x < 1$, $x^2 - 1 > 0$

donc f est bien définie sur $]-\infty, 1[$ et elle est continue car composition de fonctions continues.

Il reste à considérer $x = 1$ et $x = -1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^x \cos x}{x} = e \cos 1 = e \cos 1 \qquad = \lim_{x \to 1^-} e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)} \cos x = \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{\sin(\frac{\pi}{2}x)} \cos x = e^0 \cos(-1) \neq 0 = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

Donc f est continue en $x = 1$ et discontinue en $x = -1$ et continue en $x = 1$

En conclusion f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dérivabilité :

On remarque que $e^x, \cos x, \frac{\pi x}{2}$ sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$ (admis), $\frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car quotient de 1 et x qui sont dérivables et $x \neq 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $x^2 - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$.

donc comme pour la continuité, sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, f est dérivable car produit et composition de fonction dérivables. En $x=-1$, f n'est pas continue donc f pas dérivable.

En $x=1$, il faut calculer $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{1+h}\cos(1+h) - e\cos 1}{h} = \lim_{h\to 0} e\left(\frac{e^h\cos(1+h)-\cos(1)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} e\left(\frac{e^h \cos 1 - \sin 1\, h + o(h) - \cos 1}{h}\right) = \lim_{h\to 0^+} e^h\left(-\sin 1 + \frac{o(h)}{h}\right) = 1\cdot(-\sin 1) = -\sin 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\sin(\frac{\pi}{2}(1+h))}\cos(1+h) - e\cos(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} e\left(\frac{e^{\sin(\frac{\pi}{2}(1+h))-1}\cos(1+h) - \cos(1)}{h}\right)$$

$$\left(e^{\sin(\frac{\pi}{2}(1+h))-1}\right)'\Big|_{h=0} = e^{\sin(\frac{\pi}{2}(1+h))-1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+h)\right)\cdot\frac{\pi}{2}\Big|_{h=0} = e^{1-1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^0 = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} e\left(\frac{(1+h+o(h))(\cos 1 - \sin 1\, h + o(h))}{h}\right) = \lim_{h\to 0^-} e\left(\frac{\cos 1 + (\cos 1 - \sin 1)h + o(h) - \cos 1}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0^-} e(\cos 1 - \sin 1) + \frac{o(h)}{h} = e(\cos 1 - \sin 1).$$

donc $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$; donc f n'est pas dérivable en -1.

3. $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}h\right) \to 0$ si $h \to 0$.

on peut donc écrire

$u = \sin\left(\frac{\pi}{2}h\right) = 0 + \frac{\pi}{2}h - \frac{1}{6}\left(\pi/2\, h\right)^3 + o(h^4)$

donc $e^{\sin(\pi/2\, h)} = 1 + \left(\frac{\pi}{2}h - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 h^3 + o(h^4)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}h - \frac{1}{6}\left(\pi/2\right)^3 h^3 + o(h^4)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}h - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 h^3 + o(h^4)\right)^3 +$

$+ \frac{1}{4!}\left(\pi/2\, h - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 h^3 + o(h)^4\right)^4 + o(u^4)$

$= 1 + \frac{\pi}{2}h - \frac{1}{6}\left(\pi/2\right)^3 h^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}h\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}h\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}h\right)^4 + o(h^4) =$

$= 1 + \frac{\pi}{2}h + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}h^2\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 h^4 + o(h^4).$

$\cos(h) = 1 - \frac{1}{6}h^3 + o(h^4)$

donc $e^{\sin(\pi/2\, h)} \cdot \cos(h) = \left(1 + \frac{\pi}{2}h + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 h^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 h^4 + o(h^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}h^3 + o(h^4)\right)$

$= 1 + \pi/2\, h + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 h^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 h^4 - \frac{1}{6}h^3 - \frac{\pi}{12}h^4 + o(h^4) =$

$= 1 + \pi/2\, h + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 h^2 - \frac{1}{6}h^3 + \left(\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\pi}{12}\right)h^4 + o(h^4)$

Donc la droite tangente à la courbe en 0 est la droite d'équation $y = 1 + \frac{\pi}{2}x$.
près de 0, la différence entre la courbe et la droite tangente est donné par $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 h^2 > 0$
donc la courbe passe en haut de sa tangente.

4. pour $x \to +\infty$ $f(x) = \frac{e^x \cos(x)}{x}$ qui n'admet pas de limite.
($\frac{e^x}{x} \to +\infty$, mais $\cos x$ oscille ente -1 et $+1$.)
Donc la fonction n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

4. Pour $x \to -\infty$.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} = |x| \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}$

On pose $s = \frac{1}{x}$.

On a que $\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}u^2 + o(u^2)$

donc $\sqrt{1-s^2} = 1 - \frac{1}{2}s^2 + o(s^4)$

$|x| = -x$ près de $-\infty$.

donc $f(x) = |x|\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc le graphe de f admet un asymptote d'équation $y = -x$.

De plus on voit que $\frac{1}{2x} < 0$ si $x \to -\infty$, donc le graphe passe en bas de l'asymptote.

5. La fonction f n'est pas dérivable en $x = \pm 1$. Donc on ne peut pas écrire la formule de Taylor.

Exercice 2.

On suppose que f est dérivable en x_0.
cela signifie que
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$ où a est une constante ($a \in \mathbb{R}$).

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta$ tel que si $|h| < \delta$

$$\left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| < \varepsilon$$

Cela implique

$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon |h|$

Sans perte de généralité on peut supposer
$|h| \leq 1$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que si $|h| < \delta$
$|f(x_0+h) - f(h)| < \varepsilon |h| \leq \varepsilon$.

Cela est equivalent à dire que
$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$
cet à dire
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c.à.d. f continue en x_0.