Fonctions rationnelles

Définition *Fonction rationnelle*

Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes de degré respectivement v et δ. Toute fonction du type $P(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ est dite *fraction rationnelle*.

- ⋆ Si $v \ge \delta$ on dit que P est une *fraction rationnelle impropre*.
- ⋆ Si $v < \delta$ on dit que P est une *fraction rationnelle propre*.

Propriété

Soit N et D deux polynômes de degré respectivement v et δ et $P(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fraction rationnelle impropre (*i.e.* $v \ge \delta$). Alors, en effectuant la division euclidienne de N par D, on peut réécrire P comme

$$P(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

où Q est un polynôme de degré $v - \delta$ et R un polynôme de degré au plus $\delta - 1$, ainsi $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fraction rationnelle propre.

On en déduit que

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x.$$

L'intégration de Q étant triviale, on conclut que la difficulté de l'intégration d'une fraction rationnelle se réduit à l'intégration d'une fraction rationnelle propre.

Propriété

Si $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fraction rationnelle propre et si D possède

- ⋆ k racines réelles a_k chacune de multiplicité m_k et
- ⋆ h couples de racines complexes conjuguées qui sont racines du polynôme $x^2 + b_h x + d_h$ chacune de multiplicité n_h (ainsi $\Delta = b_h^2 - 4d_h < 0$ pour tout h),

alors D s'écrit

$$D(x) = c(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}(x^2+b_2x+d_2)^{n_2}\dots(x^2+b_hx+d_h)^{n_h}$$

et $\frac{R(x)}{D(x)}$ se décompose en *fractions simples* sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{D(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} \\
&+ \frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,m_1}}{(x-a_2)^{m_2}} \\
&+ \dots + \\
&+ \frac{A_{k,1}}{x-a_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(x-a_k)^{m_k}} \\
&+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+b_1x+d_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+b_1x+d_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}} \\
&+ \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2+b_2x+d_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2+b_2x+d_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,n_2}x + C_{2,n_2}}{(x^2+b_2x+d_2)^{n_2}} \\
&+ \dots + \\
&+ \frac{B_{h,1}x + C_{h,1}}{x^2+b_hx+d_h} + \frac{B_{h,2}x + C_{h,2}}{(x^2+b_hx+d_h)^2} + \dots + \frac{B_{h,n_h}x + C_{h,n_h}}{(x^2+b_hx+d_h)^{n_k}}
\end{aligned}$$

où les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes.

Pour intégrer une fraction rationnelle il suffit alors de connaître les primitives des quatre fractions simples suivantes :

$$f_1(x) = \frac{A}{x-a}, \qquad f_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad f_3(x) = \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}, \qquad f_4(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}.$$

Propriété *Intégration des fractions simples*

Supposons

- ⋆ $A, B, C, a, b, d \in \mathbb{R}$
- ⋆ $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$
- ⋆ $\Delta = b^2 - 4d < 0$

alors

1. la primitive de $f_1(x)=\frac{A}{x-a}$ est
$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + \text{cnst};$$
2. la primitive de $f_2(x)=\frac{A}{(x-a)^n}$ est
$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + \text{cnst};$$
3. la primitive de $f_3(x)=\frac{Bx+C}{x^2+bx+d}$ est
$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(d-\frac{b^2}{4}\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{d-\frac{b^2}{2}}}\int \frac{B\left(\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,t-\frac{b}{2}\right)+C}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{B}{2}\ln|1+t^2| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\arctan(t) + \text{cnst} \\
&= \frac{B}{2}\ln\left|1+\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{d-\frac{b^2}{4}}\right| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\right) + \text{cnst};
\end{aligned}$$
$$x+\tfrac{b}{2}=\sqrt{d-\tfrac{b^2}{4}}\,t \qquad \mathrm{d}x=\sqrt{d-\tfrac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}t$$
4. la primitive de $f_4(x)=\frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}$ est
$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \left(C-\frac{Bb}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$
avec
$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+d)^{n-1}} \\
I_2 &= \int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(d-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n}\underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t}_{I^n}
\end{aligned}$$
$$x+\tfrac{b}{2}=\sqrt{d-\tfrac{b^2}{4}}\,t \qquad \mathrm{d}x=\sqrt{d-\tfrac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}t$$
et l'intégrale I^n se calcule par récurrence
$$I^n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I^{n-1}.$$

Exemple

1. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x)=\frac{x-3}{x^2-4x+5}$. Comme $\Delta=4^2-4\times5<0$ il s'agit d'un intégrale du type $\int\frac{Bx+C}{x^2+bx+d}\,\mathrm{d}x$. Le dénominateur se décompose comme $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ et l'intégrale s'écrit
$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-3}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t+2)-3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \arctan(t) + \text{cnst} = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) - \arctan(x-2) + \text{cnst}
\end{aligned}$$
2. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x)=\frac{3x+1}{x^3-4x}$. On doit d'abord la décomposer en fractions simples ; comme

$x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$ la fonction admet la décomposition

$$f(x) = \frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Pour calculer les constantes A_i on peut utiliser le principe d'identité des polynômes :

$$\frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1(x-2)(x+2)+A_2x(x+2)+A_3x(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(2A_2-2A_3)x-4A_1}{x(x-2)(x+2)} \iff \begin{cases} A_1+A_2+A_3=0\\ 2A_2-2A_3=3\\ -4A_1=1\end{cases}$$

ainsi

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\,dx - \frac{5}{8}\int\frac{A_2}{x-2}\,dx + \frac{7}{8}\int\frac{A_3}{x+2}\,dx = -\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{5}{8}\ln|x-2| + \frac{7}{8}\ln|x+2| + c.$$

3. On veut intégrer la fraction rationnelle impropre $f(x) = \frac{3x^3+2x-5}{3x^2-5x-2}$. On effectue d'abord la division euclidienne

$$\begin{array}{cccc|l} 3x^3 & & +2x & -5 & 3x^2-5x-2 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +5x^2 & +2x & & x+\frac{5}{3} \\ \cline{1-4} & 5x^2 & +4x & -5 & \\ & -5x^2 & +\frac{25}{3}x & +\frac{10}{3} & \\ \cline{2-4} & & \frac{37}{3}x & -\frac{5}{3} & \end{array}$$

ainsi $f(x) = x + \frac{5}{3} + \frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}$. Maintenant on décompose le terme $\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}$ en fractions simples : on a $3x^2-5x-2 = (x+\frac{1}{3})(x-2)$ et on doit chercher les deux constantes A_1 et A_2 telles que

$$\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2} = \frac{A_1}{x+\frac{1}{3}} + \frac{A_2}{x-2}$$

En utilisant le principe d'identité des polynômes on a

$$\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x+\frac{1}{3})}{3x^2-5x-2} = \frac{(A_1+A_2)x-2A_1+\frac{A_2}{3}}{3x^2-5x-2} \iff \begin{cases} A_1+A_2=\frac{37}{3}\\ -2A_1+\frac{A_2}{3}=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

On conclut que

$$\int f(x)\,dx = \int x+\frac{5}{3}+\frac{52/63}{x+\frac{1}{3}}+\frac{207/63}{x-2}\,dx = \frac{x^2}{2}+\frac{5}{3}x+\frac{52}{63}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|+\frac{207}{63}\ln|x-2|+c.$$

4. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3}$. On doit d'abord la décomposer en fraction simples ; comme $x^3-x^2-5x-3 = (x-3)(x+1)^2$ la fonction f admet la décomposition

$$f(x) = \frac{A_{1,1}}{x-3} + \frac{A_{2,1}}{x+1} + \frac{A_{2,2}}{(x+1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\begin{aligned}\frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3} &= \frac{A_{1,1}(x+1)^2+A_{2,1}(x-3)(x+1)+A_{2,2}(x-3)}{x^3-x^2-5x-3}\\ &= \frac{(A_{1,1}+A_{2,1})x^2+(2A_{1,1}-2A_{2,1}+A_{2,2})x+A_{1,1}-3A_{2,1}-3A_{2,2}}{x^3-x^2-5x-3} \iff \begin{cases} A_{1,1}+A_{2,1}=0\\ 2A_{1,1}-2A_{2,1}+A_{2,2}=1\\ A_{1,1}-3A_{2,1}-3A_{2,2}=-4\end{cases}\end{aligned}$$

On conclut que

$$f(x) = \frac{-1/16}{x-3} + \frac{1/16}{x+1} + \frac{-5/4}{(x+1)^2}$$

et

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{16}\ln|x-3| + \frac{1}{16}\ln|x+1| - \frac{5}{4(x+1)} + c.$$

5. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2}$. Comme $\Delta = 4-20 < 0$, la fonction f se décompose comme

$$f(x) = \frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+5} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2-2x+5)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2}=\frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2-2x+5)^2}=\frac{B_1x^3+(C_1-2B_1)x^2+(5B_1-2C_1+B_2)x+5C_1+C_2}{(x^2-2x+5)^2}\iff\begin{cases}B_1=0\\C_1-2B_1=1\\5B_1-2C_1+B_2=0\\5C_1+C_2=2\end{cases}$$

On obtient alors que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{2x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_2}.$$

⋆ On calcule I_1 :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x && x-1=2t\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t && \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan(t)+c=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c;\end{aligned}$$

⋆ On calcule I_2 :

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\int\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\int\frac{1}{((x-1)^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{8}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{16}\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan(t)\right)\\&=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{16}\left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}+\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)+c=-\frac{x+7}{8(x^2-2x+5)}-\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{x+7}{8(x^2-2x+5)}+c.$$

6. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x)=\frac{1}{x^3(x^2+1)^2}$ qui se décompose comme

$$f(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_1}{x^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3(x^2+1)^2}&=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{(A_1+B_1)x^6+(A_2+C_1)x^5+(2A_1+A_3+B_1+B_2)x^4+(2A_2+C_1+C_2)x^3+(A_1+2A_3)x^2+(A_2)x+(A_3)}{x^3(x^2+1)^2}\\&\iff\begin{cases}A_1+B_1=0\\A_2+C_1=0\\2A_1+A_3+B_1+B_2=0\\2A_2+C_1+C_2=0\\A_1+2A_3=0\\A_2=0\\A_3=1\end{cases}\end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x&=-2\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x+\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=-2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\&=-2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)}+c.\end{aligned}$$

Intégrales définies

Théorème *fondamentale du calcul différentiel et intégral*

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors

1. la dérivée de $g(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est égale à $f(x)$;
2. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$.